REALIZA UNA DE LAS DOS OPCIONES PROPUESTAS (A O B).

OPCIÓN A

Ejercicio 1

(3 puntos) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real *a* y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ x+(a+4)y+(a+1)z=0 \\ -(a+2)y+\left(a^2+3a+2\right)z=a+4 \end{cases}$$

Ejercicio 2

(2 puntos) Sean los puntos *P*(7, 4 ,2), *Q*(1, 2, –2) y *R*(2 ,1, –3). Uno de ellos es el centro de un rombo, y los otros dos vértices. Halla los dos vértices restantes.

Ejercicio 3

Calcula las siguientes integrales indefinidas:

(1 punto) $\int e^{\cos 3x}\operatorname{sen} 3x\,dx$.

(1 punto) $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos^2 x}dx$.

Ejercicio 4

(3 puntos) Halla las asíntotas (no es necesario hacer el estudio de posición de la curva respecto de ellas) y los extremos relativos de la función $f(x)=\frac{2x^2+6}{x-1}$.

OPCIÓN B

Ejercicio 1

(2 puntos) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix}$ **tal que** $|A| = -1$**. Calcula el determinante de la matriz** A^2B^t **siendo**

$$B = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 2a - x & 2b - y & 2c - z \\ a + 1 & b + 1 & c + 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2

(3 puntos) Halla la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P(-4, 0, 5)$ **y corta a las rectas**

$$r: \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \qquad s: \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1}$$

Ejercicio 3

(2 puntos) Demuestra que existe $\alpha \in (2,3)$ **tal que** $f(\alpha) = \frac{-3}{2}$ **siendo** $f(x) = \cos(\pi x)\sqrt[3]{x^3 - 2x^2 - 1}$.

Menciona los fundamentos teóricos empleados y justifica su uso.

Ejercicio 4

(3 puntos) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2 + 3x$ **y** $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \le 2 \\ 3 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$**. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.**

SOLUCIÓN DE LA OPCIÓN A

Ejercicio 1

Estudiamos el sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro real a:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & a+4 & a+1 & 0 \\ 0 & -(a+2) & a^2+3a+2 & a+4 \end{array}\right) \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & a+4 & a+1 \\ 0 & -(a+2) & a^2+3a+2 \end{pmatrix}$$

Igualamos a cero el determinante de la matriz A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & a+4 & a+1 \\ 0 & -(a+2) & a^2+3a+2 \end{vmatrix} \xrightarrow[F_2 \to F_2 - F_1]{} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & a+2 & a+1 \\ 0 & -(a+2) & a^2+3a+2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} a+2 & a+1 \\ -(a+2) & a^2+3a+2 \end{vmatrix} = (a^2+3a+2)(a+2) + (a+1)(a+2) = (a^2+4a+3)(a+2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2+4a+3 = 0 \Rightarrow a = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} \Rightarrow a = -1, a = -3 \\ a+2 = 0 \Rightarrow a = -2 \end{cases}.$$

Luego para todo valor de a distinto de –1, –2 y –3 el determinante será distinto de cero, y por lo tanto el rango de la matriz será 3. Será un sistema compatible determinado.

Si $a = -1$ $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \to F_2 - F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 + F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$, entonces

$\text{rg}(A) = 2 \neq \text{rg}(A^*) = 3$. Será un sistema incompatible.

Si $a = -2$: $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$, $\text{rg}(A) = 2 \neq \text{rg}(A^*) = 3$, ya que hay al menos un determinante de un menor de la matriz ampliada distinto de cero, mientras que la matriz A tiene una fila de ceros, y al menos el menor $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ Será un sistema incompatible.

Si $a = -3$: $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \to F_2 - F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \to F_2 + F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$. Entonces el rango de A será 2, al igual que el de la matriz ampliada, ya que tiene una fila completa también de ceros.

Por tanto, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) <$ número de incógnitas $= 3$. Por lo que será un sistema compatible indeterminado.

Resolvemos el sistema en los casos en que es compatible.

Si $a \neq -1$, $a \neq -2$ y $a \neq -3$, el sistema es compatible determinado. Resolvemos por Cramer:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & a+4 & a+1 \\ 0 & -(a+2) & a^2+3a+2 \end{vmatrix} = (a+1)(a+2)(a+3)$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & a+4 & a+1 \\ a+4 & -(a+2) & a^2+3a+2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a+4 & a+1 \\ a+4 & -3a-10 & a^2+3a+2 \end{vmatrix}}{(a+1)(a+2)(a+3)} = \frac{(a^2+3a+2)(a+4)+(3a+10)(a+1)}{(a+1)(a+2)(a+3)} =$$

$$= \frac{(a+2)(a+1)(a+4)+(3a+10)(a+1)}{(a+1)(a+2)(a+3)} = \frac{(a+2)(a+4)+(3a+10)}{(a+2)(a+3)} =$$

$$= \frac{a^2+9a+18}{(a+2)(a+3)} = \frac{(a+6)(a+3)}{(a+2)(a+3)} = \frac{a+6}{a+2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a+1 \\ 0 & a+4 & a^2+3a+2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a+1 \\ 0 & a+4 & a^2+3a+2 \end{vmatrix}}{(a+1)(a+2)(a+3)} = \frac{-(a^2+3a+2)-(a+4)(a+1)}{(a+1)(a+2)(a+3)} =$$

$$= \frac{-(a+2)(a+1)-(a+4)(a+1)}{(a+1)(a+2)(a+3)} = \frac{-(a+2)-(a+4)}{(a+2)(a+3)} = \frac{-2a-6}{(a+2)(a+3)} = \frac{-2(a+3)}{(a+2)(a+3)} = \frac{-2}{a+2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a+4 & 0 \\ 0 & -(a+2) & a+4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a+2 & -1 \\ 0 & -(a+2) & a+4 \end{vmatrix}}{(a+1)(a+2)(a+3)} = \frac{(a+4)(a+2)-(a+2)}{(a+1)(a+2)(a+3)} = \frac{(a+4)-1}{(a+1)(a+3)} =$$

$$= \frac{a+3}{(a+1)(a+3)} = \frac{1}{a+1}$$

Si $a = -3$, el sistema es compatible indeterminado. Hallamos la solución:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x+2y=1 \\ y+2z=1 \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=1 \\ y=1-2\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2(1-2\lambda)=1 \\ y=1-2\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1+4\lambda \\ y=1-2\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

Por tanto la solución es $x = -1+4\lambda$, $y = 1-2\lambda$, $z = \lambda$.

Ejercicio 2

Calculamos los vectores $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{QR}$

$$\overrightarrow{PQ} = (1,2,-2) - (7,4,2) = (-6,-2,-4) \Rightarrow \vec{v}_1 = (3,1,2)$$

$$\overrightarrow{PR} = (2,1,3) - (7,4,2) = (-5,-3,-5) \Rightarrow \vec{v}_2 = (5,3,5)$$

$$\overrightarrow{QR} = (2,1,-3) - (1,2,-2) = (1,-1,-1)$$

Sabemos que las diagonales de un rombo son perpendiculares, por lo que estudiamos la perpendicularidad de los vectores:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = (3,1,2) \cdot (5,3,5) = 28 \neq 0$$

$$\vec{v}_1 \cdot \overrightarrow{QR} = (3,1,2) \cdot (1,-1,-1) = 0$$

$$\vec{v}_2 \cdot \overrightarrow{QR} = (5,3,5)(1,-1,-1) = -3 \neq 0$$

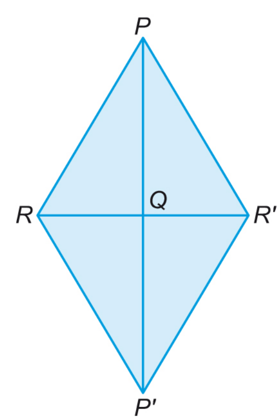
De manera que los vectores que son perpendiculares nos determinan el centro del rombo, al ser donde se cruzan las diagonales de forma perpendicular:

$\vec{v}_1 \perp \overrightarrow{QR} \Rightarrow Q$ es el centro del rombo, y P y R dos vértices consecutivos.

Observando el dibujo, vemos que $Q(1, 2, -2)$ será el punto medio de los segmentos PP' y RR':

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{7 + x_{P'}}{2} \\ 2 = \dfrac{4 + y_{P'}}{2} \\ -2 = \dfrac{2 + z_{P'}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7 + x_{P'} = 2 \\ 4 + y_{P'} = 4 \\ 2 + z_{P'} = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{P'} = -5 \\ y_{P'} = 0 \\ z_{P'} = -6 \end{cases} \Rightarrow P'(-5,0,-6).$$

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{2 + x_{P'}}{2} \\ 2 = \dfrac{1 + y_{P'}}{2} \\ -2 = \dfrac{-3 + z_{P'}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 + x_{P'} = 2 \\ 1 + y_{P'} = 4 \\ -3 + z_{P'} = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{P'} = 0 \\ y_{P'} = 3 \\ z_{P'} = -1 \end{cases} \Rightarrow R'(0,3,-1).$$



Ejercicio 3

Para resolver $\int e^{\cos 3x} \operatorname{sen} 3x dx$ realizamos un cambio de variable:

$t = \cos 3x \qquad\qquad dt = -3 \operatorname{sen} 3x dx$

$$\int e^{\cos 3x} \operatorname{sen} 3x dx = \int e^{t} \left(\frac{-1}{3}\right) dt = \frac{-1}{3} e^{t} = \frac{-1}{3} e^{\cos 3x} + C$$

Para resolver $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos^2 x} dx$ realizamos un cambio de variable:

$t = \cos^2 x \qquad\qquad dt = -2 \operatorname{sen} x \cos x dx$

Por otro lado, conocemos la identidad trigonométrica $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$

$$\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos^2 x} dx = \int \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{1+\cos^2 x} dx = -\int \frac{1}{1+t} dt = -\ln|1+t| = -\ln\left|1+\cos^2 x\right| + C .$$

Ejercicio 4

Calculamos el dominio de la función $f(x)=\dfrac{2x^2+6}{x-1}$. Igualamos a cero el denominador de la función:

$x-1=0 \Rightarrow x=1$.

Por tanto, $D(f)=\mathbb{R}-\{1\}$.

Asíntotas:

Verticales: Tiene una asíntota vertical en $x=1$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{2x^2+6}{x-1}=+\infty,\quad \lim_{x\to 1^-}\frac{2x^2+6}{x-1}=-\infty$$

Horizontales:

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+6}{x-1}=+\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+6}{x-1}=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \text{No tendrá asíntotas horizontales.}$$

Oblicuas:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+6}{x(x-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+6}{x^2-x}=2.$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+6}{x-1}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+6-2x(x-1)}{x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+6}{x-1}\right)=2$$

Luego la asíntota oblicua es $y=2x+2$ (coincide con la asíntota oblicua cuando $x\to-\infty$).

Calculamos los extremos relativos:

$$f'(x)=0\Rightarrow f'(x)=\frac{4x(x-1)-(2x^2+6)}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-4x+6}{(x-1)^2}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2-4x+6=x^2-2x+3=0\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-12}}{2}\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{-8}}{2}\Rightarrow \text{No tiene solución.}$$

Luego $f(x)$ no tiene extremos relativos.