Realizar una de las dos opciones propuestas (A o B)

OPCIÓN A

Ejercicio 1

Una empresa va a contratar personal para la campaña de rebajas. Cada dependienta que contrate trabajará 8 horas al día y cobrará 60 euros diarios. Cada cajera trabajará 10 horas al día y cobrará 90 euros diarios. Se seleccionan 8 dependientas y 9 cajeras en paro. Si la empresa dispone de 930 euros diarios para sueldos, ¿cuántas empleadas de cada clase debe contratar para que cubran el mayor número de horas?

a) (1,5 puntos) Plantee el problema.

b) (1,5 puntos) Resuélvalo gráficamente.

c) (0,5 puntos) Analice gráficamente qué ocurriría si cada cajera tuviera que trabajar 12 horas diarias.

Ejercicio 2

Dada la función $f(x)=\begin{cases} 2x+5 & \text{si } x<-2 \\ x^2+2x+1 & \text{si } -2\le x<1 \\ -x^2+2 & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$.

a) (1,5 puntos) Estudie su continuidad y derivabilidad en todo $\mathbb{R}$.

b) (1 punto) Dibuje su gráfica.

c) (1 punto) Aplicando la definición de derivada, calcule la derivada de $f(x)$ en $x=3$

Ejercicio 3

El salario medio correspondiente a una muestra aleatoria de 900 personas de una población dada es de 1190 euros. Se sabe que los salarios de esa población siguen una distribución normal de desviación típica 150 euros.

a) (1,5 puntos) Calcule el intervalo de confianza al 95 % para la media poblacional.

b) (1,5 puntos) ¿Cuál debe ser el tamaño muestral para que la amplitud del intervalo sea la misma, con un nivel de confianza del 97 %?

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique la respuesta).

OPCIÓN B

Ejercicio 1

Dada la ecuación matricial $AX + 2B = 2X$ con $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Despeje a matriz *X*.

b) (2,5 puntos) Calcule la matriz *X*.

Ejercicio 2

Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) (1 punto) $f(x) = 3 + \sqrt{\dfrac{2}{x-1}}$.

b) (1 punto) $g(x) = 3\text{sen}^2 x - \ln\left(x^3 + 2\right)$.

c) (1 punto) $h(x) = 4\text{tg}\, x^2 + \exp\left(2x^2 + x\right)$.

Ejercicio 3

En un almacén hay 300 cerraduras del modelo *A*, 400 del modelo *B*, 100 del modelo *C* y 200 del modelo *D*. La probabilidad de que una cerradura se bloquee es 0,04 si es del modelo *A*, 0,02 si es el modelo *B*, 0,05 si es del modelo *C* y 0,03 si es del modelo *D*. Se toma una cerradura al azar.

a) (1,5 puntos) Calcule la probabilidad de que la cerradura se bloquee.

b) (2 puntos) Sabiendo que la cerradura se ha bloqueado, calcule la probabilidad de que no sea del modelo *B*.

SOLUCIÓN DE LA OPCIÓN A

Ejercicio 1

a) Se trata de un problema de programación lineal.

Las variables de decisión son:

x número de dependientas que se contratan y número de cajeras que se contratan

La restricciones son:

$0 \leq x \leq 8$ (un máximo de 8 dependientas).

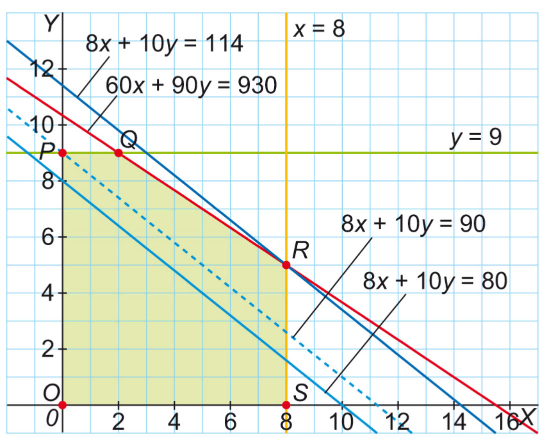
$0 \leq y \leq 9$ (un máximo de 9 cajeras).

$60x + 90y \leq 930$ (se dispone de 930 euros).

El objetivo es maximizar el número de horas de trabajo. Esto es:

Maximizar $H(x, y) = 8x + 10y$

Estas restricciones generan la región factible sombreada en la figura adjunta: polígono de vértices O, P, Q, R y S.



Como la región factible es cerrada, el máximo buscado se obtiene en alguno de sus vértices.

b) El vértice solución puede obtenerse de dos formas:

1. Gráficamente, mediante las rectas de nivel.

2. Algebraicamente, mediante la evaluación de la función objetivo en cada uno de los vértices.

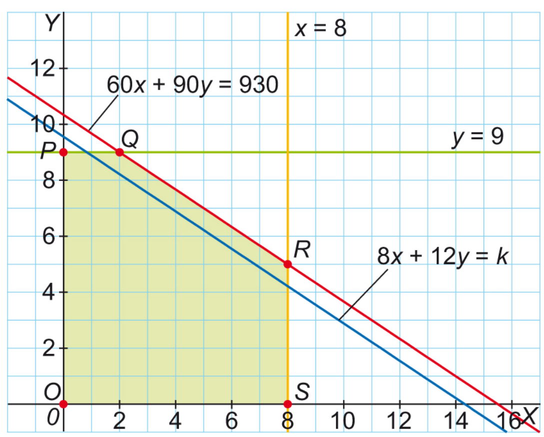
Las rectas de nivel son de la forma $8x+10y=k$. Aumentando el valor de *k* esas rectas se trasladan hacia la derecha. Todos los puntos de la región factible que están en alguna de esas rectas son solución del problema. El mayor valor de *k* (el máximo nivel), con la condición de que la recta tenga puntos en común con la región factible, es la solución buscada. Es evidente que esos puntos siempre están en el borde de la región factible, y serán un vértice (si la solución es única) o un lado (cuando hay múltiples soluciones).

En este caso, la recta de mayor nivel es la que pasa por el punto *R*.

El punto *R* es la solución del sistema $\begin{cases} x=8 \\ 60x+90y=930 \end{cases} \Rightarrow R(8,\ 5)$.

El número máximo de horas será $H(8,5)=8\cdot 8+10{\cdot}5=114$.

c) Si cada cajera tuviese que trabajar 12 horas la función objetivo sería $H(x,y)=8x+12y$; y las rectas de nivel $8x+12y=k$. La recta de nivel más a la derecha toca a la vez en los puntos *Q* y *R*. Por tanto, la solución óptima se da en cualquier punto, con coordenadas enteras, del segmento *QR*.



El máximo de horas trabajadas en este caso será:

$H(2,9)=2\cdot 8+12\cdot 9=124$;

$H(5,7)=8\cdot 5+12\cdot 7=124$;

$H(8,5)=8\cdot 8+12\cdot 5=124$.

Ejercicio 2

a) La función dada, $f(x)=\begin{cases} 2x+5 & \text{si } x<-2 \\ x^2+2x+1 & \text{si } -2\le x<1 \\ -x^2+2 & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$, está definida mediante tres funciones continuas y derivables. Por tanto, los únicos puntos dudosos son $x=-2$ y $x=1$. En esos puntos, la continuidad exige que exista límite (los límites laterales deben ser iguales). La derivabilidad exige que las derivadas laterales en cada punto coincidan.

Continuidad:

En $x=-2$:

$f(-2)=1$; $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}(2x+5)=1$; $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}\left(x^2+2x+1\right)=1 \Rightarrow$ es continua.

En $x=1$:

$f(1)=1$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2+2x+1\right)=4$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(-x^2+2\right)=1 \Rightarrow$ no es continua.

Derivabilidad:

$$f'(x)=\begin{cases} 2 & \text{si } x<-2 \\ 2x+2 & \text{si } -2<x<1 \\ -2x & \text{si } x>1 \end{cases}$$

En $x=-2$:

$\lim\limits_{x\to -2^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to -2^-} 2=2$; $\lim\limits_{x\to -2^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}(2x+2)=-2 \Rightarrow$ no es derivable.

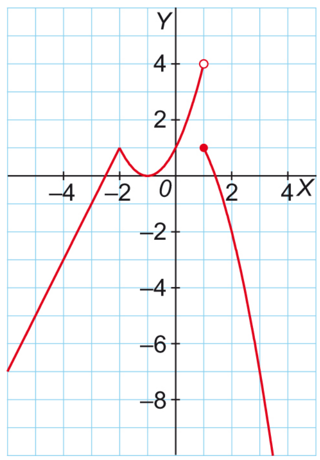
En $x=1$: al no ser continua tampoco puede ser derivable.

b) Como se trata de una función lineal y de dos parábolas, pueden dibujarse dando valores. De las parábolas puede indicarse que sus vértices se dan en el punto (–1, 0), la primera, y en el punto (0, 2) la segunda, aunque en este caso no está en su dominio.

Puntos de $f(x) = 2x + 5 \Rightarrow$ (–4, –3) y (–3, –1).

Puntos de $f(x) = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow$ (–2, 1), (–1, 0) y $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 4$.

Puntos de $f(x) = -x^2 + 2 \Rightarrow$ (1, 1), (2, –2) y (3, –7).



c) En el punto $x = 3$, $f(x) = -x^2 + 2$.

Su derivada será: $f'(3) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3+h) - f(3)}{h} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{-(3+h)^2 + 2 - (-7)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-9 - 6h - h^2 + 2 - (-7)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-6h - h^2}{h} = -6 .$$

Ejercicio 3

a) El intervalo de confianza de la media poblacional, para las muestras de tamaño *n* es:

$$IC_{1-\alpha}(\mu) = \left(\overline{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

siendo: $\overline{x}$, la media de la muestra; σ, la desviación típica de la población; y $Z_{\alpha/2}$, el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de $1-\alpha$.

En este caso: $\overline{x} = 1190$; $\sigma = 150$; $n = 900$; y, para el 95 % de confianza $\left(1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}9750\right)$, $Z_{\alpha/2} = 1{,}96$.

Luego, el intervalo será:

$$\left(1190 - 1{,}96\frac{150}{\sqrt{900}};\ 1190 + 1{,}96\frac{150}{\sqrt{900}}\right) = (1190 - 9{,}8;\ \ 1190 + 9{,}8) = (1180{,}2;\ \ 1199{,}8).$$

b) La amplitud del intervalo es 18,6. Esto indica que el error máximo es 9,8, que viene dado por $E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Si se desea mantener el error aumentando la confianza al 97 %, que asigna a $Z_{\alpha/2}$ el valor 2,17, se tendrá: $2{,}17\frac{150}{\sqrt{n}} = 9{,}8 \ \Rightarrow\ n = \left(2{,}17 \cdot \frac{150}{9{,}8}\right) = 1103{,}2$.

El tamaño muestral debe ser 1104.