Realiza una de las dos opciones propuestas (A o B)

OPCIÓN A

Ejercicio A1

Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real *a* y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} x+(a-1)y+z=-1 \\ (a-1)y+2z=-2 \\ x+(a^2-5a+5)z=-a+4 \end{cases}$$ **(3 puntos)**

Ejercicio A2

Dados el punto $P=(1,-1,0)$ y las rectas

$$r \equiv \begin{cases} 2x-y-2z+1=0 \\ 3x-y-4z+6=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x-1}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+1}{1}$$

Halla la ecuación general de un plano π que sea paralelo a ambas rectas y tal que la distancia de *P* a π sea 2. (2 puntos)

Ejercicio A3

Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+3x+1}-\sqrt{2x^2-5x+7}\right) \quad \textbf{(1 punto)}$$

$$\lim_{x\to1}\left(\cos(\pi x)+2^x\right)^{\frac{1}{\ln x}} \quad \textbf{(1 punto)}$$

Ejercicio A4

Demuestra que la función $f(x)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sqrt{x^2+x}$ tiene un máximo relativo en el intervalo (1, 3).

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (3 puntos)

OPCIÓN B

Ejercicio B1

Calcula los valores del parámetro *t* para los que la siguiente matriz no es regular:

$$A=\begin{pmatrix} -t & t+1 & -t+1 \\ 1 & 0 & -t+1 \\ 2 & -t-1 & 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{(2 puntos)}$$

Ejercicio B2

Encuentra la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P=(-4, 2, 0)$ y corta a las rectas

$$r_1 \equiv \begin{cases} 2x+3y+z-1=0 \\ x+2-3=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad r_2 \equiv \frac{x+1}{-2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z+2}{3} \quad \textbf{(3 puntos)}$$

Ejercicio B3

Encuentra los extremos absolutos de la función $f(x)=\left(x^2-3\right)e^{-x+2}$ en el intervalo [–2, 4]. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (2 puntos)

Ejercicio B4

Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f(x)=\cos\frac{\pi x}{4}$ y $g(x)=\frac{x^2}{4}-1$. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas. (3 puntos)

SOLUCIÓN DE LA OPCIÓN A

Ejercicio A1

Las matrices asociadas al sistema son $A=\begin{pmatrix}1 & a-1 & 1\\ 0 & a-1 & 2\\ 1 & 0 & a^2-5a+5\end{pmatrix}$ y $A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & a-1 & 1 & -1\\ 0 & a-1 & 2 & -2\\ 1 & 0 & a^2-5a+5 & -a+4\end{array}\right)$

Tenemos:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & a-1 & 1\\ 0 & a-1 & 2\\ 1 & 0 & a^2-5a+5\end{vmatrix}=(a-1)(a^2-5a+5)+2(a-1)-(a-1)=(a-1)\left[a^2-5a+6\right]=0\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ a=2\\ a=3\end{cases}$$

- Para $a\neq 1$, $a\neq 2$ y $a\neq 3$ tenemos $|A|\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=\text{nº de incógnitas}=3$ y, por tanto, el sistema será compatible determinado.

  Aplicando la regla de Cramer tenemos:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-1 & a-1 & 1\\ -2 & a-1 & 2\\ -a+4 & 0 & a^2-5a+5\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{(a-1)(a^2-6a+9)}{(a-1)(a^2-5a+6)}=\frac{(a-1)(a-3)^2}{(a-1)(a-2)(a-3)}=\frac{a-3}{a-2}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 2\\ 1 & -a+4 & a^2-5a+5\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-2(a^2-6a+9)}{(a-1)(a^2-5a+6)}=\frac{-2(a-3)^2}{(a-1)(a-2)(a-3)}=\frac{-2(a-3)}{(a-1)(a-2)}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & a-1 & -1\\ 0 & a-1 & -2\\ 1 & 0 & -a+4\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{(a-1)(-a+3)}{(a-1)(a^2-5a+6)}=\frac{-(a-1)(a-3)}{(a-1)(a-2)(a-3)}=-\frac{1}{a-2}$$

- Para $a=1$ tenemos $|A|=0$, con lo que $\text{rg}(A)\leq 2$, siendo $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y $A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2 & -2\\ 1 & 0 & 1 & 3\end{array}\right)$

  El menor de orden 2 $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A)=2$.

  Añadiendo a este menor la columna de los términos independientes tenemos

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -2\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix}=8\neq 0\Rightarrow \text{rg}(A^*)=3$$

  Por tanto, $\text{rg}(A)\neq\text{rg}(A^*)$ y el sistema será incompatible.

- Para $a = 2$ tenemos $|A| = 0$, con lo que $\text{rg}(A) \leq 2$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$

  El menor de orden 2 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, con lo que $\text{rg}(A) = 2$.

  Añadiendo a este menor la columna de los términos independientes tenemos

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 3$$

  Por tanto, $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$ y el sistema será incompatible.

- Para $a = 3$ tenemos $|A| = 0$, con lo que $\text{rg}(A) \leq 2$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$

  El menor de orden 2 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, con lo que $\text{rg}(A) = 2$.

  Añadiendo a este menor la columna de los términos independientes tenemos

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 2$$

  Por tanto, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) < \text{n}^{\text{o}} \text{ de incógnitas}$ y el sistema será compatible indeterminado con grado de indeterminación 1.

  Para resolver el sistema, teniendo en cuenta el menor de orden 2 que hemos usado para determinar el rango de *A*, eliminamos la tercera ecuación y hacemos $z = \lambda$, obteniendo:

$$\begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ 2y + 2z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = -1 - \lambda \\ 2y = -2 - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow x = 1 + \lambda,\ y = -1 - \lambda,\ z = \lambda$$

Ejercicio A2

Observemos que los vectores directores de las rectas r y s, $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$, serán también vectores directores del plano π, por lo que $\vec{n}_\pi = \vec{v}_r \times \vec{v}_s$ vector normal de π.

Tenemos

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} = (2, 2, 1)$$

$$\vec{v}_s = (1, 0, 1)$$

$$\vec{n}_\pi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k} = (2, -1, -2)$$

Por tanto, la ecuación general del plano π es de la forma

$$2x - y - 2z + C = 0$$

Finalmente, como la distancia de P a π es 2, tenemos

$$d(P, \pi) = 2 \Rightarrow \frac{|2\cdot 1 - (-1) - 2\cdot 0 + C|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = 2 \Rightarrow \frac{|C+3|}{3} = 2 \Rightarrow \begin{cases} C + 3 = 6 \Rightarrow C = -3 \\ C + 3 = -6 \Rightarrow C = -9 \end{cases}$$

Por tanto, existen dos planos que verifican las condiciones del enunciado, siendo sus ecuaciones generales

$$\pi_1 \equiv 2x - y - 2z - 3 = 0 \quad \text{y} \quad \pi_2 \equiv 2x - y - 2z - 9 = 0$$

Ejercicio A3

Primer límite:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{2x^2+3x+1} - \sqrt{2x^2-5x+7}\right) = \infty - \infty \text{ (indet.)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{2x^2+3x+1} - \sqrt{2x^2-5x+7}\right)\left(\sqrt{2x^2+3x+1} + \sqrt{2x^2-5x+7}\right)}{\sqrt{2x^2+3x+1} + \sqrt{2x^2-5x+7}} = \lim_{x\to+\infty} = \frac{(2x^2+3x+1) - (2x^2-5x+7)}{\sqrt{2x^2+3x+1} + \sqrt{2x^2-5x+7}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{8x-6}{\sqrt{2x^2+3x+1} + \sqrt{2x^2-5x+7}} = \frac{\infty}{\infty} \text{ (indet.)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{8 - \frac{6}{x}}{\sqrt{2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{2 - \frac{5}{x} + \frac{7}{x^2}}} = \frac{8}{2\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

Segundo límite:

$$\lim_{x\to 1}\left(\cos(\pi x)+2^x\right)^{\frac{1}{\ln x}} = 1^{\infty} \text{ (indet.)} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{\ln x}\left(\cos(\pi x)+2^x-1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cos(\pi x)+2^x-1}{\ln x}} \underset{(*)}{=} e^{\ln 4} = 4$$

$$(*)\ \lim_{x\to 1}\frac{\cos(\pi x)+2^x-1}{\ln x} = \frac{0}{0} \text{ (indet.)} = \text{(L'Hôpital)}\lim_{x\to 1}\frac{-\pi\,\text{sen}(\pi x)+2^x\cdot\ln 2}{\frac{1}{x}} = \frac{2\cdot\ln 2}{1} = 2\cdot\ln 2 = \ln\left(2^2\right) = \ln 4$$

<u>Ejercicio A4</u>

Tenemos

$$f'(x) = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sqrt{x^2+x} + \text{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$$

Como parece complicado resolver la ecuación $f'(x)=0$, usaremos el Teorema de Bolzano para demostrar que tiene al menos una raíz en el intervalo (1, 3).

> Teorema de Bolzano: Si F es una función continua en un intervalo cerrado [a, b] y, además, signo $f(a) \neq$ signo $f(\text{b})$, entonces existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que $F(c)=0$

Observemos que f' es una función continua en el intervalo [1, 3] (de hecho es continua en su dominio, $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$), $f'(1)=\frac{3}{2\sqrt{2}}>0$ y $f'(3)=-\frac{7}{2\sqrt{12}}<0$, por lo que existe al menos un $c\in(1,3)$ tal que $f'(c)=0$.

Con esto hemos probado que *f* tiene al menos un punto crítico en el intervalo (1, 3), para concluir que es un máximo relativo observemos que al ser $f'(1)=\frac{3}{2\sqrt{2}}>0$ y $f'(3)=-\frac{7}{2\sqrt{12}}<0$, la función *f* pasa de ser creciente en $x=1$ a ser decreciente en $x=3$, por lo que *f* debe tener un máximo relativo en el intervalo (1, 3).