Elija una de las dos opciones propuestas (A o B)

OPCIÓN A

Ejercicio 1

Un estudiante de bachillerato ha decidido mejorar la dieta de su animal de compañía y analiza la composición de dos marcas de pienso (*P*1 y *P*2). La siguiente tabla recoge la información asociada a una ración de cada tipo de pienso:

	Hidratos de carbono	Proteínas	Grasas	Hierro	Vitamina C	Precio de venta (€)
*P*1	4	7	2	0	0	0,8
*P*2	4	5	3	2	3	0,6

Su veterinario le ha recomendado una dosis diaria de hidratos de carbono entre 12 y 40 unidades, una dosis mínima diaria de vitamina C de 6 unidades, una dosis máxima de hierro diaria de 10 unidades y no sobrepasar 17 unidades de grasas al día. Determine cuántas raciones de cada tipo de pienso deberá usar para alimentar diariamente a su mascota si el estudiante desea maximizar la ingesta diaria de proteínas.

a) (1,5 puntos) Plantee el problema.

b) (1,5 puntos) Resuélvalo gráficamente.

c) (0,5 puntos) Analice gráficamente qué ocurriría si el estudiante cambiara de opinión y deseara minimizar el gasto diario en pienso.

Ejercicio 2

Calcule:

a) (1,25 puntos) $\int_{-1}^{0} \frac{2x^2+5x+2}{x^2+1}\,dx$ **.**

b) (1 punto) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{2x}}\,dx$ **.**

c) (1,25 puntos) Una primitiva $F(x)$ **de la función** $f(x)=\frac{3x}{(2-x^2)^2}$ **que verifique** $F(-1)=2$ **.**

Ejercicio 3

Una importante compañía aérea está preocupada por la puntualidad de sus vuelos. A partir de una muestra de 400 vuelos, se observó que 320 salieron a tiempo y se calculó el siguiente intervalo de confianza para la proporción de vuelos que salen puntualmente: (0,7485; 0,8515).

a) (1,5 puntos) Calcule el nivel de confianza de este intervalo.

b) (1,5 puntos) Calcule el intervalo de confianza de la proporción de vuelos no puntuales, con un nivel de confianza del 93 %.

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique la respuesta).

OPCIÓN B

Ejercicio 1

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&1&0\\2&1&3\end{pmatrix}$ **y** $C=\begin{pmatrix}2&1\\3&1\end{pmatrix}$**, responda a las siguientes preguntas.**

a) (1,25 puntos) Calcule: AA^t-BB^t **.**

b) (1,25 puntos) Calcule: $\left(C^{-1}\right)^2$ **.**

c) (0,5 puntos) ¿Es inversible la matriz AA^t **? Razone la respuesta.**

Ejercicio 2

Dada la función $f(x)=\dfrac{5-x}{1-x}$**, calcule:**

a) (1,25 puntos) La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ **en** $x=-1$**.**

b) (0,5 puntos) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

c) (0,75 puntos) Asíntotas de la función.

d) (1 punto) Dibuje la gráfica de $f(x)$**.**

Ejercicio 3

En un aula de bachillerato, el 7 % de las chicas y el 60 % de los chicos son lectores habituales. El número de chicas en dicha aula duplica el número de chicos. Se selecciona un estudiante al azar. Calcule:

a) (1 punto) La probabilidad de que sea lector habitual.

b) (1 punto) La probabilidad de que sea chico y no sea lector habitual.

c) (1,5 puntos) La probabilidad de que no sea chico, sabiendo que no es lector habitual.

SOLUCIÓN DE LA OPCIÓN A

Ejercicio 1

a) Se trata de un problema de programación lineal. Las variables de decisión son:

x raciones del pienso $P1$ $\qquad$ y raciones del pienso $P2$

Las recomendaciones del veterinario generan las siguientes desigualdades:

$12 \le 4x + 4y \le 40$ (Entre 12 y 40 unidades diarias de hidratos de carbono).

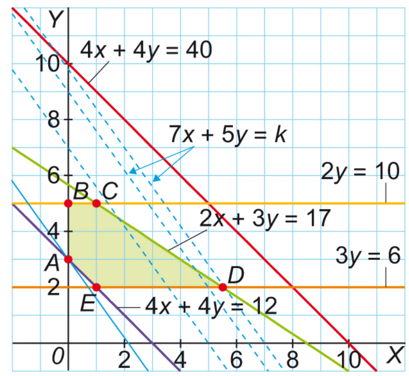
$6 \le 3y$ (Un mínimo de 6 unidades de vitamina C).

$2y \le 10$ (Un máximo de 10 unidades de hierro).

$2x + 3y \le 17$ (No sobrepasar 17 unidades de grasa).

También hay que exigir que $x \ge 0$.

El objetivo es maximizar la ingesta diaria de proteínas, es decir, maximizar $P(x, y) = 7x + 5y$



Estas restricciones generan la región factible sombreada en la figura adjunta: polígono de vértices *A*, *B*, *C*, *D* y *E*.

b) Como la región factible es cerrada, el máximo buscado se obtiene en alguno de sus vértices. Para resolverlo gráficamente se aplican las rectas de nivel.

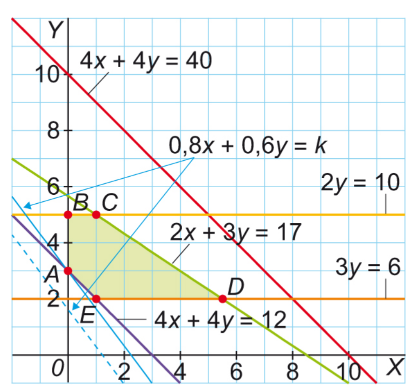
Las rectas de nivel son de la forma $7x + 5y = k$. Aumentando el valor de *k* esas rectas se trasladan hacia la derecha. Todos los puntos de la región factible que están en alguna de esas rectas son solución del problema. El mayor valor de *k* (el máximo nivel), con la condición de que la recta tenga puntos en común con la región factible, es la solución buscada. Es evidente que esos puntos siempre están en el borde de la región factible, y serán un vértice (si la solución es única) o un lado (cuando hay múltiples soluciones). En este caso, la recta de mayor nivel es la que pasa por el punto *D*.

$D: \begin{cases} y = 2 \\ 2x + 3y = 17 \end{cases} \Rightarrow D(11{,}5,\ 2)$. La ingesta máxima de proteínas será $P(11{,}5,\ 2) = 7 \cdot 11{,}5 + 5 \cdot 2 = 48{,}5$.

c) Si lo que se desea es minimizar el gasto, la función objetivo sería $G(x, y) = 0{,}8x + 0{,}6y$;
y las rectas de nivel $0{,}8x + 0{,}6y = k$.

La recta de nivel más a la izquierda, que pasa por el punto *A*, es la de menor *k*.

Por tanto, el gasto mínimo sería: $G(0,3) = 0{,}8 \cdot 0 + 0{,}6 \cdot 3 = 1{,}80$ €.



Ejercicio 2

a) $\int_{-1}^{0} \frac{2x^2+5x+2}{x^2+1}dx$. Puede transformarse el integrando como sigue:

$$\frac{2x^2+5x+2}{x^2+1} = \frac{2x^2+2+5x}{x^2+1} = \frac{2\left(x^2+1\right)+5x}{x^2+1} = 2+\frac{5x}{x^2+1}.$$

Por tanto: $\int \frac{2x^2+5x+2}{x^2+1}dx = \int\left(2+\frac{5x}{x^2+1}\right)dx = 2x+\frac{5}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx = 2x+\frac{5}{2}\ln\left(x^2+1\right)$.

Luego: $\int_{-1}^{0} \frac{2x^2+5x+2}{x^2+1}dx = \left[2x+\frac{5}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right]_{-1}^{0} = 0-\left(-2+\frac{5}{2}\ln 2\right) = 2-\frac{5}{2}\ln 2$

b) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{2x}}dx$. Es una aplicación casi directa de la expresión $\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)}+C$.

En este caso hay que "ver" la derivada del exponente: $\left(f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$.

Transformando el integrando se tiene:

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{2x}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{2x}}e^{\sqrt{x}}dx = 2\int \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}dx = \frac{2}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}dx = \sqrt{2}\int \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}dx = \sqrt{2}e^{\sqrt{x}}+C.$$

c) Una primitiva $F(x)$ de la función $f(x)=\frac{3x}{\left(2-x^2\right)^2}$ que verifique $F(-1)=2$.

También se trata de una integral prácticamente inmediata del tipo: $\int f'(x)\left(f(x)\right)^n dx = \frac{\left(f(x)\right)^{n+1}}{n+1}+C$.

Transformando el integrando se tiene: $\int \frac{3x}{\left(2-x^2\right)^2}dx = \int\left(3x\left(2-x^2\right)^{-2}\right)dx = -\frac{3}{2}\int\left(-2x\left(2-x^2\right)^{-2}\right)dx =$

$$= -\frac{3}{2}\cdot\frac{\left(2-x^2\right)^{-1}}{-1}+C = \frac{3}{2\left(2-x^2\right)}+C \Rightarrow F(x)=\frac{3}{2\left(2-x^2\right)}+C.$$

Como debe cumplirse que $F(-1)=2 \Rightarrow F(-1)=\frac{3}{2\left(2-(-1)^2\right)}+C=2 \Rightarrow \frac{3}{2}+C=2 \Rightarrow C=\frac{1}{2}$.

Por tanto: $F(x)=\frac{3}{2\left(2-x^2\right)}+\frac{1}{2}$.

Ejercicio 3

a) El intervalo de confianza para la proporción p de la población es:

$$IC_{1-\alpha}(p) = \left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right)$$

siendo: $\hat{p}$ la proporción de la muestra; *n,* el tamaño muestral; y $z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de $1 - \alpha$.

En este caso se conoce:

$\hat{p} = \frac{320}{400} = 0,80$ (Coincide con el punto central del intervalo dado (0,7485; 0,8515)).

$n = 400$;

$z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0,0515$ (Es la diferencia 0,8515 – 0,80).

Por tanto:

$$z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{0,80 \cdot 0,20}{400}} = 0,0515 \Rightarrow z_{\alpha/2}0,02 = 0,0515 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2,575 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9950 \Rightarrow \alpha = 0,01$$

Luego el nivel de confianza es del 99 %.

b) Para un 93 % de confianza, $1 - \frac{0,07}{2} = 0,9650 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,81$.

Por tanto:

$$IC_{0,93}(p) = \left(0,80 - 1,81\sqrt{\frac{0,80 \cdot 0,20}{400}}; 0,80 + 1,81\sqrt{\frac{0,80 \cdot 0,20}{400}} \right) =$$

$$= (0,80 - 0,0362;\ 0,80 + 0,0362) = (0,7638;\ 0,8362).$$