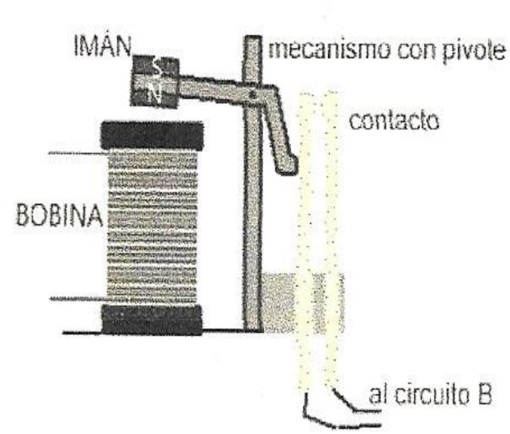
PARTE COMÚN

1. El proyecto ExoMars es una misión espacial con la finalidad de buscar vida en el planeta Marte. En una primera fase, en 2016, constaba de un satélite, el ExoMars Trace Gas Orbiter, en órbita circular alrededor de Marte a 400 km de altura, y de un módulo de descenso, el Schiaparelli, que debía aterrizar en Marte. Pero cuando el módulo de descenso estaba a 3,7 km de altura sobre Marte, prácticamente parado, los sistemas automáticos interpretaron erróneamente que ya había llegado a la superficie. Detuvieron los retrocohetes y el módulo se desprendió del paracaídas. Como resultado, el Schiaparelli se precipitó en caída libre.
a) Calcule el período del ExoMars Trace Gas Orbiter.
b) Determine el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de Marte y la velocidad a la que la nave impactó en la superficie. (Considere que la gravedad es constante durante la caída y la fricción con la atmósfera de Marte es despreciable).

Datos: Masa de Marte = $6{,}42\cdot 10^{23}$ kg; Radio de Marte = $3{,}38\cdot 10^{6}$ m; $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

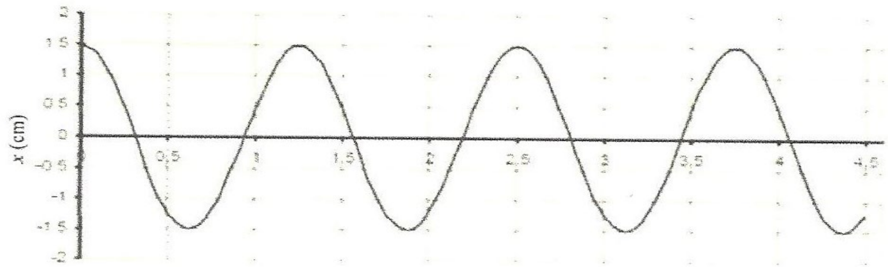
2. La figura muestra el esquema de un relé. Cuando circula una corriente eléctrica por la bobina, el extremo inferior del imán (norte) es atraído por la bobina y el movimiento se transmite por un pivote, de manera que se cierra el circuito B.



a) Especifique claramente cuál será el sentido de la corriente eléctrica en la bobina para que se active el relé (y se cierre el circuito B) y dibuje las líneas del campo magnético generado por la bobina en esta situación.
b) En unas pruebas se observa que el mecanismo carece de fuerza suficiente para cerrar el contacto. Indique qué efecto tendría sobre el dispositivo cada una de las siguientes modificaciones:
1) Aumentar la intensidad de la corriente que circula por la bobina.
2) Situar un material ferromagnético en el núcleo de la bobina.
3) Hacer pasar por la bobina una corriente alterna en lugar de una corriente continua.

OPCIÓN A

3. Un sistema vibrador situado en el punto $x = 0$ oscila tal como se indica en este gráfico elongación-tiempo y transmite su movimiento a una cuerda, de manera que se genera una onda transversal con una longitud de onda de 20,0 cm.



a) Determine el período, la amplitud y la frecuencia de la vibración y la velocidad de propagación de la onda por la cuerda. Escriba la ecuación de la onda plana (no olvide indicar todas las unidades de las magnitudes que aparecen).

b) Demuestre, a partir de la ecuación de onda, que la velocidad máxima a la que se mueven los puntos de la cuerda en sus oscilaciones puede calcularse con la expresión $v_{máx.} = A\omega$ (donde A es la amplitud y ω es la pulsación).

4. El enlace iónico de la sal común (NaCl) se produce por la atracción electrostática entre el catión Na^+ y el anión Cl^-.

a) Calcule la separación entre estos dos iones, sabiendo que la energía potencial eléctrica del sistema es de $-9{,}76 \cdot 10^{-19}$ J.

b) Si se aplica un campo eléctrico uniforme de 50,0 N C^{-1} al ion Na^+, calcule el trabajo necesario para separar los iones hasta una distancia de 2 cm.

Datos: $k = 1/4\pi\varepsilon_0 = 8{,}99 \cdot 10^9$ N m^2 C^{-2}; carga elemental $= 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C

5. La presencia del isótopo hierro–60 (^{60}Fe) en algunas rocas lunares y en algunos sedimentos oceánicos indica, según algunos astrofísicos, que una supernova explotó en las proximidades del sistema solar en una época relativamente reciente (a escala cósmica) e hizo llegar este isótopo hasta la Tierra. El ^{60}Fe tiene un período de semidesintegración de 2,6 millones de años.

a) Si hubiera habido ^{60}Fe cuando la Tierra se originó, hace 4 400 millones de años, ¿qué porcentaje de ese ^{60}Fe primordial quedaría en la actualidad? Si el ^{60}Fe se originó en la explosión de una supernova hace 13 millones de años, ¿qué porcentaje de ese ^{60}Fe debería quedar aún?

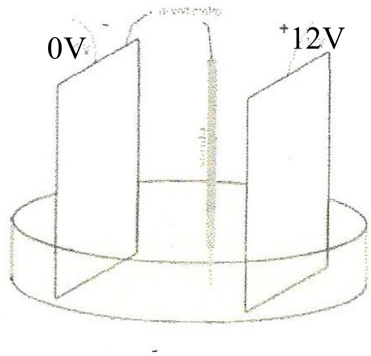
b) El ^{60}Fe se transforma, mediante una desintegración β^-, en un isótopo de cobalto (Co) de vida breve, el cual vuelve a experimentar una nueva desintegración β^- y produce un isótopo estable de níquel (Ni). Escriba las ecuaciones nucleares de las dos desintegraciones, incluyendo los antineutrinos.

Dato: Número atómico del hierro (Fe): 26.

OPCIÓN B

3. La aguja de una máquina de coser oscila con un desplazamiento vertical de 15 mm de un extremo al otro. En las especificaciones del fabricante, se indica que la aguja realiza 1200 puntadas por minuto. Suponga que la aguja describe un movimiento armónico simple.
a) Escriba la ecuación del movimiento suponiendo que en el instante inicial la aguja se encuentra en la posición más alta.
b) Calcule la velocidad y la aceleración máximas de la aguja.

4. En una cápsula de Petri llena de agua destilada se sumergen dos placas metálicas paralelas conectadas a una diferencia de potencial de 12,0 V, tal como muestra la figura. Las dos placas están separadas por una distancia de 6,00 cm. Con un voltímetro, se explora la diferencia de potencial entre la placa negativa y diferentes puntos de la región intermedia.



a) Calcule el campo eléctrico (suponiendo que es uniforme) entre las dos placas, e indique también su dirección y su sentido. Indique cuáles son las superficies equipotenciales que espera encontrar en la región comprendida entre las dos placas e indique el valor del potencial en cada una de las superficies.
b) Con la sonda, tal como se muestra en la figura, el voltímetro indica 7,0 V. Calcule el trabajo que debería realizar una fuerza externa para desplazar una carga positiva de 0,1 μC desde este punto hasta la placa positiva.

5. El período de semidesintegración de un núcleo radiactivo es de 600 s. Se dispone de una muestra que inicialmente tiene 10^{10} de estos núcleos.
a) Calcule la constante de desintegración y el número de núcleos que quedan después de una hora.
b) Calcule la actividad de la muestra dos horas después del instante inicial.

SOLUCIONES

PARTE COMÚN

1. a) La relación entre el período T del satélite (ExoMars Trace Orbiter) y el radio $R = R_{\mathrm{M}} + h = 3,38 \cdot 10^6 + 400 \cdot 10^3 = 3,78 \cdot 10^6$ m (R_{M} es el radio de Marte y h es la altura de la órbita) de su órbita viene dada por la tercera ley de Kepler. Para obtenerla partimos de la segunda ley de Newton y de la ley de la gravitación universal, teniendo en cuenta la cinemática del movimiento circular, $v = R\omega = R2\pi / T$ y llamando m a la masa del satélite ($M_{\mathrm{M}} = 6,42 \cdot 10^{23}$ kg es la masa de Marte):

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\mathrm{gravitatoria}} \Rightarrow m\frac{v^2}{R} = \frac{GM_{\mathrm{M}}m}{R^2} \Rightarrow \frac{(2\pi R / T)^2}{R} = \frac{GM_{\mathrm{M}}}{R^2} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_{\mathrm{M}}}R^3 \text{ (tercera ley de Kepler)}$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{GM_{\mathrm{M}}}} = \sqrt{\frac{4\pi^2\left(3,78 \cdot 10^6\right)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,42 \cdot 10^{23}}} = 7,06 \cdot 10^3 \text{ s} = 1,96 \text{ horas}$$

b) La aceleración de la gravedad (módulo) en la superficie de Marte, es en base a la ley de la gravitación universal:

$$a = g_{\mathrm{M}} = \frac{F_{\mathrm{gravitatoria}}}{m} = \frac{GM_{\mathrm{M}}m / R_{\mathrm{M}}^2}{m} = \frac{GM_{\mathrm{M}}}{R_{\mathrm{M}}^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,42 \cdot 10^{23}}{\left(3,38 \cdot 10^6\right)^2} = 3,75 \text{ m/s}^2$$

Dado que la fuerza gravitatoria es central y atractiva, la aceleración lleva la misma dirección y sentido: el vector aceleración apunta hacia el centro Marte.

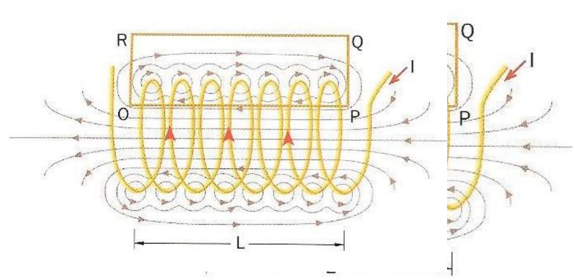
La energía mecánica del satélite en su caída libre hacia la superficie de Marte es la suma de sus energías cinética y potencial gravitatoria. La calculamos en el instante en que empieza a caer ($v_0 = 0$) en función de su masa m y de la altura $h' = 3,7$ km, suponiendo que la fuerza gravitatoria a esa altura es prácticamente constante, lo que implica que la energía potencial se escribe $E_{\mathrm{p}} = mg_{\mathrm{M}}h$:

$$E = E_{\mathrm{c}} + E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}mv_0^2 + mg_{\mathrm{M}}h = \frac{1}{2}m \cdot 0^2 + m \cdot 3,75 \cdot 3,7 \cdot 10^3 = 1,4 \cdot 10^4 m \text{ J}$$

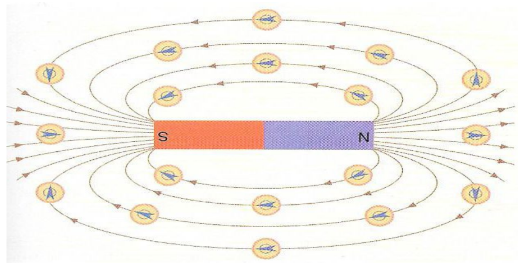
Al despreciar el rozamiento, la única fuerza que se ejerce sobre el satélite es la gravitatoria, que es una fuerza conservativa. Ello implica que la energía mecánica se conserva a lo largo de toda la caída. Esto nos sirve para calcular la velocidad de impacto v sobre la superficie de la Tierra:

$$E_{\mathrm{inicial}} = E_{\mathrm{final}} \Rightarrow 1,4 \cdot 10^4 m = \frac{1}{2}mv^2 + 0 \Rightarrow v = 1,7 \cdot 10^2 \text{ m/s}$$

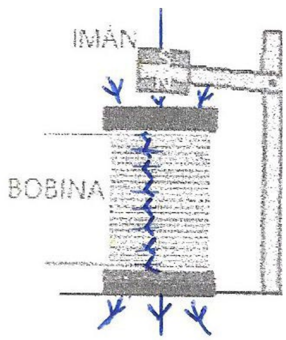
2. a) Un solenoide (bobina) es un conjunto de espiras circulares paralelas que están recorridas por la misma corriente. Puede comprobarse experimentalmente que el campo magnético debido a un solenoide es muy intenso en su interior, paralelo a su eje, prácticamente uniforme y con sentido determinado por el sentido de la corriente a través de la regla de la mano derecha. En puntos exteriores y alejados del eje del solenoide el campo es muy débil.



Las líneas de campo magnético de un imán son, esquemáticamente:



Ambos dispositivos magnéticos, bobina e imán, se pueden esquematizar en base a la "polaridad" de sus campos magnéticos, como dipolos magnéticos $\uparrow^{N}_{S}$. En los dipolos magnéticos, los polos opuestos se atraen y los iguales se repelen. Por tanto, dada la disposición de la bobina y el imán, la corriente de la bobina debe llevar el sentido representado en las siguientes gráficas:



$\downarrow^{S}_{N}$ Imán

$\downarrow^{S}_{N}$ Bobina

b) El campo magnético de la bobina es proporcional a la intensidad de corriente *I*, y a la permeabilidad magnética del medio magnético en el interior de la bobina, μ. Por tanto, para aumentar el campo magnético de la bobina debemos aumentar la intensidad de corriente o introducir un material ferromagnético cuya permeabilidad magnética sea muy superior a la del vacío (por ejemplo, el hierro tiene permeabilidad $\mu \approx 5000\mu_0$). El único efecto de la corriente alterna sería cambiar la "polaridad" del campo magnético de la bobina, pero no aumentaría su intensidad.

OPCIÓN B

3. a) Si el *mas* se realiza en el eje Y centrado en el origen de coordenadas, la expresión de su posición "y" en función del tiempo t es $y(t) = A\,\text{sen}\left(\omega t + \delta\right)$, donde la constante $A > 0$ se denomina "amplitud" y proporciona las posiciones extremas $x = \pm A$ del movimiento, la constante δ representa el desfase respecto del *mas* que comienza en el origen de coordenadas, $x(0) = 0$, con velocidad positiva, y la constante ω se denomina "frecuencia angular", se relaciona con el periodo T del movimiento a través de $T = 2\pi / \omega$ y con la frecuencia (oscilaciones por segundo) $f = 1/T = \omega / 2\pi$.

De los datos del enunciado deducimos que, al ser la amplitud es la mitad del desplazamiento máximo, $A = 15/2 = 7{,}5\ \text{mm}$; además, la frecuencia es $f = 1200\ \text{Hz}$, con lo que $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 1200 = 2400\pi\ \text{s}^{-1}$. Por tanto, $y\left(t\right) = 7{,}5 \cdot 10^{-3}\,\text{sen}\left(2400\pi t + \delta\right)$. La constante δ se determina a partir de las condiciones iniciales del movimiento, $y(0) = A = 7{,}5\ \text{mm}$ (la aguja en el instante inicial está en la posición más alta):

$$7{,}5 \cdot 10^{-3} = 7{,}5 \cdot 10^{-3}\,\text{sen}\,\delta \Rightarrow \text{sen}\,\delta = 1 \Rightarrow \delta = \frac{\pi}{2}$$

Finalmente:

$$y(t) = 7{,}5 \cdot 10^{-3} \operatorname{sen}\left(2400\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = 7{,}5 \cdot 10^{-3} \cos\left(2400\pi t\right)$$

b) La velocidad $v(t)$ y la aceleración $a(t)$ de la aguja se obtienen derivando sucesivamente la posición:

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = A\omega \cos\left(\omega t + \delta\right)$$

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = -A\omega^2 \operatorname{sen}\left(\omega t + \delta\right)$$

Dado que el máximo valor absoluto de $\cos\left(\omega t + \delta\right)$ es 1 concluimos que el máximo del módulo de la velocidad es $v_{\text{máx.}} = A\omega$. El máximo valor absoluto de la aceleración es $a_{\text{máx.}} = A\omega^2$, que se alcanza cuando $\operatorname{sen}\left(\omega t + \delta\right) = \pm 1$. En nuestro caso:

$$v_{\text{máx.}} = A\omega = 7{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 2400\pi = 18\pi \text{ m/s}$$

$$a_{\text{máx.}} = A\omega^2 = 7{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot (2400\pi)^2 = 43200\pi^2 \text{ m/s}^2$$

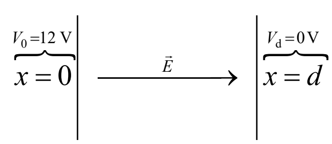
4. a) Definamos los ejes coordenados de forma que el campo eléctrico lleve la dirección X y sentido positivo, es decir, $\vec{E} = E\vec{i}$ N/C con $E > 0$, y las placas se encuentren en el intervalo $0 \le x \le d = 0{,}06$ m. Para un campo eléctrico constante:

$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}$$

el potencial eléctrico es:

$$V = V_0 - \left(E_x x + E_y y + E_z z\right)$$

donde V_0 es el potencial en el origen de coordenadas. En nuestro caso, $V = V_0 - Ex$. La placa positiva se encuentra en el origen de coordenadas a potencial $V_0 = 12V$ y la placa negativa en $x = d = 0{,}06$ m:



Con estos datos calculamos el campo eléctrico entre las placas:

$$V_d = V_0 - Ed \Rightarrow E = \frac{V_0 - V_d}{d} = \frac{12 - 0}{0{,}06} = 200 \text{ V}$$

y escribimos finalmente el potencial eléctrico en el interior de las placas: $V = 12 - 200x$ (en voltios).

Una superficie equipotencial es aquella en la que todos los puntos se encuentran al mismo potencial eléctrico V. El campo eléctrico es siempre perpendicular a las superficies equipotenciales y su sentido viene dado por el decrecimiento del potencial eléctrico. En nuestro caso es claro que las superficies equipotenciales dentro de las placas son las superficies $x = cte.$, para $0 \le x \le 0{,}06$ m. Para cada una de ellas, el potencial vale $V = 12 - 200x$ (voltios).

b) El trabajo que realiza el campo eléctrico $\vec{E}$ para trasladar una carga q desde el punto A hasta el punto B es $W = -q\Delta V = q\left(V(\mathrm{A}) - V(\mathrm{B})\right)$. La carga que se traslada es $q = 0{,}1\ \mu\mathrm{C}$ y los potenciales en los puntos inicial y final son respectivamente $V\left(\mathrm{A}\right) = 7{,}0\ \mathrm{V}$ y $V\left(\mathrm{B}\right) = 12\ \mathrm{V}$. Por tanto:

$$W = q\left(V\left(\mathrm{A}\right) - V\left(\mathrm{B}\right)\right) = 0{,}1\cdot 10^{-6}\left(7-12\right) = -5\cdot 10^{-7}\ \mathrm{J}$$

El trabajo del campo eléctrico es negativo, lo que significa que el movimiento de la carga se produce en contra del campo (la carga q es positiva y se siente repelida por la placa positiva). Por ello, el agente externo al campo que mueve la carga debe realizar un trabajo $W_{\mathrm{externo}} = 5\cdot 10^{-7}\ \mathrm{J}$.

5. a) La desintegración radiactiva de una muestra en la que inicialmente había N_0 núcleos sin desintegrar se produce según la ley $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, donde $N(t)$ es el número de estos núcleos que quedan sin desintegrar al cabo de un tiempo t y λ es la llamada "constante de desintegración", cuya relación con la semivida $t_{1/2}$ (o período de semidesintegración) es $t_{1/2} = \ln 2/\lambda$.

Primero calculamos la constante de desintegración λ a través de la semivida o periodo de desintegración:

$$t_{1/2} = 600\,s:\ t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} = \frac{\ln 2}{600} = 1{,}15\cdot 10^{-3}\ \mathrm{s}^{-1}$$

Como $N_0 = 10^{10}$, en el instante t quedan sin desintegrar $N(t) = 10^{10} e^{-1{,}15\cdot 10^{-3} t}$ núcleos. Al cabo de una hora, $t = 3600\,s$, tenemos:

$$N\left(3600\right) = 10^{10} e^{-1{,}15\cdot 10^{-3}\cdot 3600} = 1{,}59\cdot 10^{9}\ \text{núcleos}$$

b) La actividad $A(t)$ de una muestra es la velocidad instantánea (en valor absoluto) de desintegración de la muestra en el tiempo t. Al ser $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ el número de núcleos que quedan sin desintegrar al cabo de un tiempo t, la actividad es $A(t) = \lambda\left|N(t)\right| = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = \lambda N(t)$. Teniendo en cuenta que la actividad inicial es $A(0) = \lambda N_0$ podemos escribir $A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$. Sus unidades en el SI se denominan Bq (Becquerel). En nuestro caso:

$$A(t) = \lambda\left|N(t)\right| = 1{,}15\cdot 10^{-3}\cdot 10^{10} e^{-1{,}15\cdot 10^{-3} t} = 1{,}15\cdot 10^{7} e^{-1{,}15\cdot 10^{-3} t}\ \mathrm{Bq}$$

y al cabo de 2 horas, $t = 7200\,s$, la actividad es:

$$A\left(7200\right) = 1{,}15\cdot 10^{7} e^{-1{,}15\cdot 10^{-3}\cdot 7200} = 2{,}92\cdot 10^{3}\ \mathrm{Bq}$$