Serie 1

Responda a CINCO de las siguientes seis cuestiones. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

Cuestión 1

Considere las matrices M de la forma $M = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, donde a es un número real.

a) **(1 punto) Determine a de forma que $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -2a & -1 \end{pmatrix}$.**

b) **(1 punto) Determine a de forma que $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, donde M^{-1} representa la matriz inversa de M.**
   Es decir, $MM^{-1} = I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

Cuestión 2

Considere la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x-a}$, donde a es un parámetro real.

a) **(1 punto) Encuentre para qué valores del parámetro a la recta tangente a la función f en $x = 1$ es paralela a la recta $y + 3x + 5 = 0$.**

b) **(1 punto) Para el valor del parámetro $a = 1$, encuentre los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los puntos donde se alcanzan los máximos y mínimos relativos de la función f.**

Cuestión 3

Pol quedó ayer con unos amigos en un bar y tomaron 4 refrescos, 3 bocadillos y 5 bolas de helado. Todo junto les costó 19,50 €. Días atrás, había ido al mismo bar con su primo Martí, y por 2 refrescos, 1 bocadillo y 2 bolas de helado habían pagado 8,10 €. En este bar todos los refrescos valen lo mismo, todos los bocadillos tienen el mismo precio y las bolas de helado se venden también a precio único.

a) **(1 punto) Hoy Pol ha vuelto a ir con otros amigos y han tomado 6 refrescos, 5 bocadillos y 8 bolas de helado. Explique razonadamente cuánto han pagado en total.**

b) **(1 punto) Si 1 refresco, 1 bocadillo y 1 bola de helado cuestan 5,10 €, ¿cuánto vale el refresco, el bocadillo y la bola de helado por separado?**

Cuestión 4

Una empresa de materiales para coches fabrica dos modelos de una determinada pieza, que se denominarán *A* y *B*. Cada modelo se fabrica en una hora, mediante un proceso que consta de dos fases. En la primera fase del proceso se destinan 5 trabajadores, y en la segunda, 12. Para fabricar cada modelo, en la primera fase se necesita 1 trabajador para cada pieza. En cambio, en la segunda fase se necesitan 2 trabajadores para el modelo *A* y 3 trabajadores para el modelo *B*. El beneficio que se obtiene es de 40 € por el modelo *A* y 50 € por el modelo *B*.

a) (1,25 puntos) Determine la función objetivo y las restricciones, y dibuje la región factible.

b) (0,75 puntos) ¿Cuántas piezas de cada modelo por hora tendrán que fabricarse para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es este beneficio máximo?

Cuestión 5

Una compañía de móviles presentó hace un año un teléfono inteligente al precio de 750 €. Recientemente, un estudio de mercado ha llegado a la conclusión de que, con este precio, compran el teléfono 2.000 clientes al mes, y de que la relación entre estas dos variables es lineal, de forma que por cada 10 € que se incrementa el precio del móvil, lo compran 100 clientes menos, y al revés: por cada 10 € de descuento sobre el precio inicial de 750 €, lo compran 100 clientes más.

a) (1 punto) Deduzca que la función que determina los ingresos mensuales de la compañía según el precio del móvil es $I(p) = -10p^2 + 9500p$.

b) (1 punto) Encuentre cuál tiene que ser el precio del móvil para obtener ingresos, el precio del móvil que da los ingresos mensuales más elevados y el valor de estos ingresos máximos.

Cuestión 6

El número de individuos, en millones, de una población viene determinado por la función $P(t) = \dfrac{5+t^2}{(t+1)^2}$, donde *t* mide el número de años transcurridos.

a) (1 punto) ¿Cuál es la población inicial y la población después de 9 años? ¿A partir de qué momento la población será inferior a un millón de individuos?

b) (1 punto) Con el paso del tiempo, ¿hacia qué valor tenderá el número de individuos de la población?

SOLUCIÓN

Cuestión 1

a) Si $M = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, y se desea que $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -2a & -1 \end{pmatrix}$ entonces:

$$\begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -2a & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4-a^2 & 2a \\ -2a & -a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -2a & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4-a^2 = 3 \\ -a^2 = -1 \end{cases} \Rightarrow a = 1,\ a = -1.$$

b) Si $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, como $MM^{-1} = I$. Entonces:

$$\begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -a & 2+2a \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a = -1.$$

Cuestión 2

a) Si se desea que la recta tangente a $f(x)=\dfrac{x^2}{x-a}$ en el punto $x=1$ sea paralela a la recta $y+3x+5=0\ \left(\Leftrightarrow y=-3x-5\right)$, la pendiente de dicha recta debe ser igual a la derivada en el punto de tangencia; luego, $f'(1)=-3$.

$$f(x)=\frac{x^2}{x-a}\Rightarrow f'(x)=\frac{2x(x-a)-x^2}{(x-a)^2}=\frac{x^2-2ax}{(x-a)^2}\Rightarrow f'(1)=\frac{1-2a}{(1-a)^2}=-3\Rightarrow$$

$$1-2a=-3(1-a)^2\Rightarrow 1-2a=-3+6a-3a^2\Rightarrow 3a^2-8a+4=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=\frac{8\pm\sqrt{64-48}}{6}=\frac{8\pm\sqrt{16}}{6}\Rightarrow a=2,\ a=\frac{2}{3}$$

b) Para $a=1$, la función es $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$, y su derivada es $f'(x)=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$.

La derivada se anula cuando $x=0$ o $x=2$, y la función no está definida en el punto $x=1$.

Con esto:

Si $x<0$, como $f'(x)>0\Rightarrow f(x)$ es creciente.

Si $0<x<1$, $f'(x)<0\Rightarrow f(x)$ es decreciente.

Si $1<x<2$, $f'(x)<0\Rightarrow f(x)$ es decreciente.

Si $x>2$, $f'(x)>0\Rightarrow f(x)$ es creciente.

De estos resultados puede deducirse que:

En $x=0$, la función tiene un máximo relativo (crece a su izquierda y decrece a su derecha); punto $(0,0)$.

En $x=2$, la función tiene un mínimo relativo (decrece a su izquierda y crece a su derecha); punto $(2,4)$.

En $x=1$ la función tiene una asíntota vertical.

Cuestión 3

a) Supongamos que el precio de un refresco es x euros; de un bocadillo, y euros; y de un helado, z euros.

Del enunciado se deducen las siguientes ecuaciones:

$4x+3y+5z=19{,}50$ (Ayer tomaron 4 refrescos, 3 bocadillos y 5 bolas de helado por 19,50 €).

$2x+y+2z=8{,}10$ (Días atrás Pol y su primo tomaron 2 refrescos, 1 bocadillo y 2 bolas de helado por (8,10 €).

A las dos ecuaciones anteriores hay que añadir la siguiente ecuación al sistema:

$6x+5y+8z=d$ (Otro día tomaron 6 refrescos, 5 bocadillos y 8 bolas de helado)

siendo d lo que se pagó el tercer día, es desconocido; pero, como ese valor debe ser coherente con los precios de los productos consumidos, el sistema debe ser compatible.

Por tanto, haciendo transformaciones de Gauss sobre el sistema formado por esta ecuación y las dos anteriores se tiene:

$$\begin{cases} 4x+3y+5z=19{,}50 \\ 2x+y+2z=8{,}10 \\ 6x+5y+8z=d \end{cases} \xrightarrow[\substack{E_1\to E_1-2E_2 \\ E_3\to E_3-3E_2}]{} \begin{cases} y+z=3{,}30 \\ 2x+y+2z=8{,}10 \\ 0=d-30{,}90 \end{cases}.$$

El sistema es compatible, aunque indeterminado, cuando $d=30{,}90$. Por tanto, el tercer día pagaron 30,90 euros.

(A la misma conclusión se llega imponiendo que el rango de la matriz de coeficientes y el de la matriz ampliada sean iguales; en este caso, iguales a 2: podría observarse que las ecuaciones iniciales cumplen la relación $E_3=2E_1-E_2$).

b) Si se conoce que $x+y+z=5{,}10$, entonces, el sistema sería:

$$\begin{cases} 4x+3y+5z=19{,}50 \\ 2x+y+2z=8{,}10 \\ x+y+z=5{,}10 \end{cases} \xrightarrow[\substack{E_1\to E_1-2E_2 \\ E_3\to 2E_3-E_2}]{} \begin{cases} y+z=3{,}30 \\ 2x+y+2z=8{,}10 \\ y=2{,}10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=3{,}30-2{,}10=1{,}20 \\ 2x+2{,}10+2\cdot 1{,}20=8{,}10 \Rightarrow x=1{,}80 \\ y=2{,}10 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z=1{,}20 \\ x=1{,}80 \\ y=2{,}10 \end{cases}$$

Un refresco vale 1,80 €; un bocadillo, 2,10 €; una bola de helado, 1,20 €.

Cuestión 4

a) Se trata de un problema de programación lineal. Las variables de decisión son:

x unidades de piezas del modelo *A*   *y* unidades de piezas del modelo *B*

Con los datos del problema se forma la siguiente tabla:

	1ª fase	2ª fase	Beneficio
Modelo *A* (x)	x	$2x$	$40x$
Modelo *B* (y)	y	$3y$	$50y$
Necesidades	5	12	

El objetivo es maximizar el beneficio: $B(x,y)=40x+50y$

Sujeto a:

$x+y\le 5$ (Hay 5 trabajadores destinados para la 1ª fase).

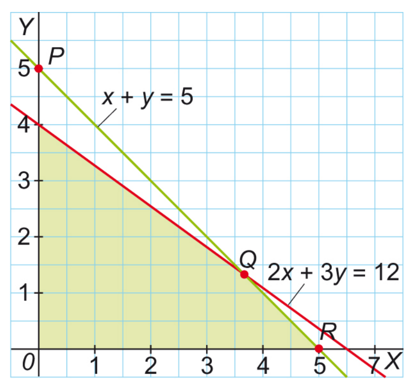
$2x+3y\le 12$ (Hay 12 trabajadores destinados para la 2ª fase).

También hay que tener en cuenta las condiciones de no negatividad: $x\ge 0$; $y\ge 0$.

La región factible es la sombreada en la figura adjunta. Se obtiene representando las rectas asociadas a las inecuaciones anteriores.

Las coordenadas de los vértices *O*(0, 0), *P*(0,4) y *R*(5, 0) se obtienen al representar las rectas; las del vértice *Q*, resolviendo el sistema:

$$Q\text{: }\begin{cases}x+y=5\\2x+3y=12\end{cases}\Rightarrow Q(3,\,2).$$



b) Como se trata de una región cerrada, la solución óptima (en este caso el beneficio máximo), se da en alguno de los vértices anteriores. El beneficio en cada uno de esos vértices es:

En *O*, $B(0,0)=0$ €.

En *P*, $B(0,4)=40\cdot 0+50\cdot 4=200$ €.

En *Q*, $B(3,2)=40\cdot 3+50\cdot 2=220$ €.

En *R*, $B(5,0)=40\cdot 5=200$ €.

El beneficio máximo, que es de 220 €, se obtiene fabricando 3 piezas del modelo *A* y 2 piezas del modelo *B*.

Cuestión 5

a) Si la relación entre el número de clientes y el precio del móvil es lineal, su ecuación será del tipo $c = mp + n$, siendo c el número de clientes y p el precio; m y n son la pendiente de la recta y la ordenada en el origen, respectivamente.

Se conocen dos puntos de esa recta: (750, 2000) y (760, 1900) y a un precio de 750 € tiene 2000 clientes, y que por cada 10 € que se incrementa el precio del móvil, lo compran 100 clientes menos, y al revés: por cada 10 € de descuento sobre el precio inicial de 750 €, lo compran 100 clientes más.

Por tanto:

$$\begin{cases} 2000 = 750m + n \\ 1900 = 760m + n \end{cases} \Rightarrow m = -10;\ n = 9500 \Rightarrow c = -10p + 9500 .$$

Los ingresos viene dados por el producto del precio, p, por el número de clientes, c. Luego:

$$I(p) = pc = p\left(-10p + 9500\right) \Rightarrow I(p) = -10p^2 + 9500p .$$

b) El precio del móvil para obtener beneficio viene dado por la solución de la inecuación

$$I(p) = -10p^2 + 9500p > 0 \Rightarrow -10p\left(p - 950p\right) > 0 \Rightarrow 0 < p < 950.$$

El máximo de $I(p) = -10p^2 + 9500p$ se da en la solución de $I'(p) = 0$ que hace negativa a $I''(p)$.

$$I'(p) = -20p + 9500 = 0 \Rightarrow p = 475.$$

Como $I''(p) = -20 < 0$, entonces para ese precio $p = 475$ se tiene el máximo ingreso, que asciende a:

$$I(475) = -10 \cdot 475^2 + 9500 \cdot 475 = 2\,256\,250 \text{ de euros.}$$

Cuestión 6

a) Si el número de individuos, en millones, de una población viene determinado por la función $P(t)=\dfrac{5+t^2}{(t+1)^2}$, donde t mide el número de años transcurridos, entonces:

En el momento inicial: $P(0)=\dfrac{5+0^2}{(0+1)^2}=5$ millones.

Al cabo de 9 años: $P(9)=\dfrac{5+9^2}{(9+1)^2}=\dfrac{86}{100}=0{,}86$ millones.

La población será inferior a un millón de individuos si

$$P(t)=\frac{5+t^2}{(t+1)^2}<1 \Rightarrow 5+t^2<(t+1)^2 \Rightarrow 5+t^2<t^2+2t+1 \Rightarrow 4<2t \Rightarrow t>2\,.$$

A partir de $t=2$ la población será inferior a 1 millón.

b) Con el paso del tiempo la población tenderá a 1 millón de individuos porque

$$\lim_{t\to+\infty}(P(t))=\lim_{t\to+\infty}\frac{5+t^2}{(t+1)^2}=\lim_{t\to+\infty}\frac{5+t^2}{t^2+2t+1}=1.$$