Responde a CINCO de las seis cuestiones. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.
Cada cuestión vale 2 puntos.
Puede utilizar la calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

Ejercicio 1

Sean las rectas de $\mathbb{R}^3$

$$r:\begin{cases} 2x - y = 1 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \qquad s: x+1 = \frac{y-2}{2} = z-1$$

a) Compruebe que son paralelas.

[1 punto]

b) Calcule la ecuación vectorial del plano que las contiene.

[1 punto]

Ejercicio 2

Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + kz = 1 \\ x + (k+1)y + z = k^2 - 4 \end{cases}$$

en el que k es un parámetro real.

a) Discuta el sistema para los diferentes valores de k.

[1 punto]

b) Resuelva el sistema para el caso $k = -2$.

[1 punto]

Ejercicio 3

Responda las siguientes cuestiones:

a) Compruebe que la recta tangente a la curva $y = x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$ es la recta $y = 4x - 4$ y calcule los puntos de intersección de esta recta con los ejes de coordenadas.

[1 punto]

b) Calcule el área limitada por la curva del apartado anterior, la recta tangente en $x = 2$ y el eje de abscisas.

[1 punto]

Ejercicio 4

Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcule las potencias A^2, A^3 y A^6.

[1 punto]

b) Calcule la inversa de la matriz A^5.

[1 punto]

Ejercicio 5

Sea $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$ **la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales.**

a) Discuta el sistema según los valores del parámetro *a*, e intérprete el resultado geométricamente.

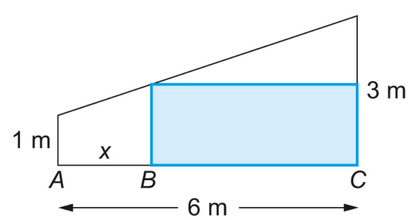
[1 punto]

b) Para $a = 1$ encuentre la forma paramétrica del plano solución y dé un punto y dos vectores directores de este plano.

[1 punto]

Ejercicio 6

El croquis de debajo representa la pared de un desván con el techo inclinado, en la que se quiere construir un armario rectangular como el de la zona sombreada.



a) Exprese el área del rectángulo en función de la longitud *x* del segmento *AB*.

[1 punto]

b) Determine las dimensiones del rectángulo si se quiere que tenga una superficie máxima y calcule esta superficie máxima.

[1 punto]

SOLUCIÓN

Ejercicio 1

a) Para determinar la posición relativa de las rectas *r* y *s* tenemos que calcular los rangos de las matrices $M=(\vec{v}_r, \vec{v}_s)$ y $M'=(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{RS})$, siendo $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ vectores directores de *r* y *s*, respectivamente, y *R* y *S* puntos de *r* y *s*, respectivamente.

Las ecuaciones paramétricas de *s* son (tomando $z=\lambda$):

$$\begin{cases} 2x-y=1 \\ y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{y}{2} \\ y=2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2}+\lambda \\ y=2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

De este modo tenemos

$$\vec{v}_r=(1,2,1) \qquad \vec{v}_s=(1,2,1) \qquad R\left(\frac{1}{2},0,0\right) \qquad S(-1,2,1) \qquad \overrightarrow{RS}=\left(-\frac{3}{2},2,1\right)$$

$$M=(\vec{v}_r, \vec{v}_s)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad M'=(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{RS})=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Observemos que $\operatorname{rg}(M)=1$ por ser sus filas iguales y $\operatorname{rg}(M')=2$ por ser $|M'|=0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{vmatrix}=5\neq 0$, por tanto, las rectas *r* y *s* son paralelas.

b) El plano que contiene a las rectas *r* y *s* viene determinado por un punto cualquiera de ellas, por ejemplo, *S*, y los vectores directores $\vec{v}_r=\vec{v}_s$ y $\overrightarrow{RS}$, por tanto, su ecuación vectorial es

$$\pi:(x,y,z)=(-1,2,1)+\lambda(1,2,1)+\mu\left(-\frac{3}{2},2,1\right)$$

Ejercicio 2

a) Las matrices asociadas al sistema son $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & k \\ 1 & k+1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & k & 1 \\ 1 & k+1 & 1 & k^2-4 \end{array}\right)$

Tenemos:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & k \\ 1 & k+1 & 1 \end{vmatrix} = -k^2 + 4 = 0 \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = -2, k = 2$$

- Para $k \neq -2$ y $k \neq 2$ tenemos $|A| \neq 0$, con lo que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = \text{nº de incógnitas} = 3$ y, por tanto, el sistema será compatible determinado.

- Para $k = -2$ tenemos $|A| = 0$, con lo que $\text{rg}(A) \leq 2$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

  El menor de orden 2 $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, con lo que $\text{rg}(A) = 2$.

  Añadiendo a este menor la columna de los términos independientes tenemos

  $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 2$$

  Por tanto, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) < \text{nº de incógnitas}$ y el sistema será compatible indeterminado.

- Para $k = 2$ tenemos $|A| = 0$, con lo que $\text{rg}(A) \leq 2$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right)$

  El menor de orden 2 $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, con lo que $\text{rg}(A) = 2$.

  Añadiendo a este menor la columna de los términos independientes tenemos

  $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 3$$

  Por tanto, $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$ y el sistema será incompatible.

b) Para $k = -2$ el sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - 2z = 1 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

es compatible indeterminado. Para resolverlo, teniendo en cuenta el menor de orden dos utilizado para calcular el rango de *A* en este caso, podemos eliminar la tercera ecuación y hacer $z = \lambda$, obteniendo:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = -\lambda \\ 2x = 1 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2} + \lambda,\ y = \frac{1}{2} + 2\lambda,\ z = \lambda$$

Ejercicio 3

a) $y = x^2 \Rightarrow y' = 2x$

La ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 2$ es

$$y - 2^2 = 2 \cdot 2(x - 2) \Rightarrow y - 4 = 4(x - 2) \Rightarrow y = 4x - 4$$

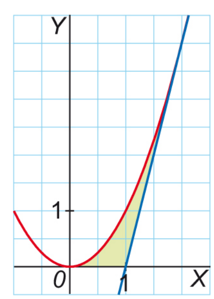
Puntos de corte de la recta $y = 4x - 4$ con los ejes de coordenadas:

Eje *OY*: $x = 0 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow$ Punto (0, –4)

Eje *OX*: $y = 0 \Rightarrow 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow$ Punto (1, 0)

b) Esbozamos las gráficas de las funiones para tener una idea del área que debemos calcular.

Obtenemos:



$$S = \int_0^1 x^2\, dx + \int_1^2 x^2 - (4x - 4)\, dx = \int_0^1 x^2\, dx + \int_1^2 x^2 - 4x + 4\, dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right]_1^2 = \left(\frac{1}{3} - 0\right) + \left(\frac{8}{3} - \frac{7}{3}\right) = \frac{2}{3}\ \text{u}^2$$

Ejercicio 4

a) $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$

$A^6 = A^3A^3 = (-I)(-I) = I$

b) $A^6 = I \Rightarrow AA^5 = I \Rightarrow (A^5)^{-1} = A$

Ejercicio 5

a) Las matrices asociadas al sistema son

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{array}\right).$$

Geométricamente, el sistema representa la posición relativa de tres planos.

Tenemos:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2,\ a = 1 \text{ (raíz doble)}$$

- Para $a \neq -2$ y $a \neq 1$ tenemos $|A| \neq 0$, con lo que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = \text{nº de incógnitas} = 3$ y, por tanto, el sistema será compatible determinado.

  Geométricamente, los tres planos se cortan en un punto, es decir, forman un triedro.

- Para $a = -2$ tenemos $|A| = 0$, con lo que $\text{rg}(A) \le 2$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

El menor de orden 2 $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \ne 0$, con lo que $\text{rg}(A) = 2$.

Añadiendo a este menor la columna de los términos independientes tenemos

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 9 \ne 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 3$$

Por tanto, $\text{rg}(A) \ne \text{rg}(A^*)$ y el sistema será incompatible.

Geométricamente, los tres planos no se cortan, por lo que bien forman un prisma (son secantes dos a dos) bien dos planos son paralelos y el otro los corta. Si se diera este último caso, habría dos filas de *A* proporcionales, como no sucede así, los tres planos forman un prisma.

- Para $a = 1$ tenemos $|A| = 0$, con lo que $\text{rg}(A) \le 2$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Obviamente $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 1 < \text{nº de incógnitas}$ y el sistema será compatible indeterminado con grado de indeterminación 2.

Geométricamente, los tres planos son coincidentes.

b) Para $a = 1$ el sistema representa tres planos coincidentes, el sistema se reduce a una única ecuación del plano $\pi : x + y + z = 1$, cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$x + y + z = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \mu - \lambda \\ y = \mu \\ z = \lambda \end{cases}$$

A partir de estas ecuaciones paramétricas encontramos el punto del plano *P*(1, 0, 0) y los vectores directores $\vec{v}_1 = (-1, 1, 0)$ y $\vec{v}_2 = (-1, 0, 1)$.

Ejercicio 6

a) Sea y la altura del rectángulo sombreado, con lo que su área será $S=(6-x)y$.

Para expresar y en función de x observemos que el área trapecio de altura AC coincide con la suma de las áreas de los trapecios de altura AB y BC, es decir:

$$\frac{(3+1)\cdot 6}{2}=\frac{(y+1)x}{2}+\frac{(3+y)(6-x)}{2}\Rightarrow 24=xy+x+18-3x+6y-xy\Rightarrow 6y-2x=6\Rightarrow y=\frac{3+x}{3}$$

Por tanto, el área del rectángulo viene dada por la expresión

$$S(x)=\frac{(6-x)(3+x)}{3}=\frac{-x^2+3x+18}{3},\ 0\le x\le 6.$$

b) Queremos maximizar la función $S(x)=\dfrac{-x^2+3x+18}{3}$ en el intervalo [0, 6].

Tenemos: $S'(x)=\dfrac{-2x+3}{3}=0\Rightarrow -2x+3=0\Rightarrow x=\dfrac{3}{2}$

Como $S(1)=6$, $S\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{27}{4}$ y $S(6)=0$, el máximo se alcanza cuando $x=\dfrac{3}{2}$ y su valor es $S=\dfrac{27}{4}$, por tanto, la superficie máxima, $S=\dfrac{27}{4}=6{,}75\text{ m}^2$ se obtiene cuando $x=\dfrac{3}{2}=1{,}5\text{ m}$, es decir, cuando el rectángulo tiene $6-x=4{,}5\text{ m}$ de base e $y=\dfrac{3+x}{3}=1{,}5\text{ m}$ de altura.