Serie 2

Responda a CINCO de las siguientes seis cuestiones. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

Cuestión 1

De una función $y = f(x)$ sabemos que su derivada es $f'(x) = x^3 - 4x$.

a) (1 punto) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $y = f(x)$.

b) (1 punto) Determine las abscisas de sus extremos relativos y clasifíquelos.

Cuestión 2

Desde una barca se dispara una bengala de salvamiento marítimo que se apaga al cabo de 4 minutos. En este intervalo de tiempo, se comprueba que su intensidad lumínica en función del tiempo, medida en porcentajes del 0 % al 100 %, queda perfectamente descrita por la expresión $L(t) = 25t(4 - t)$, donde el tiempo t varía entre 0 y 4 minutos.

a) (1 punto) Calcule para qué valor de t el porcentaje de intensidad lumínica será máximo.

b) (1 punto) Si desde la costa la bengala solo es visible cuando su intensidad lumínica es superior al 75%, ¿cuál es el intervalo de tiempo en el que será visible desde la costa y, por tanto, será más factible el salvamiento?

Cuestión 3

Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ m & n \end{pmatrix}$, donde m y n son dos números reales.

a) (1 punto) Compruebe que se cumple la igualdad $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$.

b) (1 punto) Determine m y n de forma que las matrices B y C conmuten, es decir, $BC = CB$.

Cuestión 4

Tenemos unas cuantas monedas de un euro distribuidas en tres pilas. Pasamos doce monedas de la tercera pila a la segunda y, a continuación, pasamos diez de la segunda pila a la primera. Después de esto, las tres pilas tienen la misma cantidad de monedas.

a) (1 punto) Con estos datos, ¿puede determinarse la cantidad de monedas que había inicialmente en cada pila? Razone la respuesta.

b) (1 punto) Averigüe la cantidad de monedas que había inicialmente en cada pila si se sabe que en total hay 51 monedas.

Cuestión 5

Una compañía aérea quiere organizar para este verano un puente aéreo entre el aeropuerto de Barcelona – El Prat y el de Palma de Mallorca, con plazas suficientes de pasaje y carga para transportar como mínimo 1.600 personas y 96 toneladas de equipaje y mercancías. Para ello, tiene a su disposición 11 aviones del tipo *A*, que pueden transportar 200 personas y 6 toneladas de equipaje y mercancías cada uno, y 8 aviones del tipo *B*, que pueden transportar 100 personas y 15 toneladas cada uno. Si la contratación de un avión del tipo *A* cuesta 4.000 euros y la de un avión del tipo *B* cuesta 1.000:

a) (1 punto) Determine la función objetivo y las restricciones, y dibuje la región de las posibles opciones que tiene la compañía.

b) (1 punto) Calcule el número de aviones de cada tipo que hay que contratar para que el coste sea el mínimo y determine cuál es este coste mínimo.

Cuestión 6

Considere la función $f(x) = -x^2 + bx + c$, con b y c números reales.

a) (1 punto) Encuentre b y c de forma que la gráfica de la función pase por el punto (–1, 0) y tenga un extremo local en el punto de abscisa $x = 3$. Razone de qué tipo de extremo relativo se trata.

b) (1 punto) Para el caso $b = 3$ y $c = 2$, encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica que es paralela a la recta $y = 5x - 2$.

SOLUCIÓN

Cuestión 1

a) Si de la función $y = f(x)$ se sabe que $f'(x) = x^3 - 4x$, se tiene:

$$x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x\left(x^2 - 4\right) = 0 \Rightarrow x\left(x+2\right)\left(x-2\right) = 0$$

La derivada se anula en los puntos $x = -2$, $x = 0$ y $x = 2$.

Con esto:

Si $x < -2$, $f'(x) < 0 \Rightarrow y = f(x)$ es decreciente.

Si $-2 < x < 0$, $f'(x) > 0 \Rightarrow y = f(x)$ es creciente.

Si $0 < x < 2$, $f'(x) < 0 \Rightarrow y = f(x)$ es decreciente.

Si $x > 2$, $f'(x) > 0 \Rightarrow y = f(x)$ es creciente.

De estos resultados puede deducirse que:

En $x = -2$, la función tiene un mínimo relativo (decrece a su izquierda y crece a su derecha).

En $x = 0$, la función tiene un máximo relativo (crece a la izquierda de 0 y decrece su derecha).

En $x = 2$, la función tiene otro mínimo relativo (decrece a su izquierda y crece a su derecha).

b) Al mismo resultado se llega mediante el signo de la derivada segunda en esos puntos singulares.

Como $f''(x) = 3x^2 - 4$ se tiene:

$f''(-2) = 12 - 4 > 0 \Rightarrow$ en $x = -2$ hay un mínimo relativo.

$f''(0) = -4 < 0 \Rightarrow$ en $x = 0$ hay un máximo relativo.

$f''(2) = 12 - 4 > 0 \Rightarrow$ en $x = 2$ hay otro mínimo relativo.

Cuestión 2

La función dada es $L(t) = 25t\left(4 - t\right)$, donde el tiempo t varía entre 0 y 4 minutos.

a) El máximo de $L(t) = 25t\left(4 - t\right)$ se da en la solución de $L'(t) = 0$ que hace negativa a $L''(t)$.

$L(t) = 25t\left(4 - t\right) \Rightarrow L(t) = 100t - 25t^2 \Rightarrow L'(t) = 100 - 50t$, que se anula en $t = 2$.

Como $L''(t) = -50 < 0 \Rightarrow$ para ese valor de $t = 2$ se tiene el máximo de $L(t)$.

En ese instante, $L(2) = 25 \cdot 2 \cdot \left(4 - 2\right) = 50 \cdot 2 = 100$.

b) La intensidad lumínica es superior al 75 % $(L(t) > 75)$ en el intervalo solución de la inecuación $100t - 25t^2 > 75$.

Como $100t - 25t^2 = 75 \Leftrightarrow 25t^2 - 100t + 75 = 0 \Leftrightarrow 25\left(t^2 - 4t + 3\right) = 0 \Leftrightarrow 25(t-1)(t-3) = 0$, se tiene que

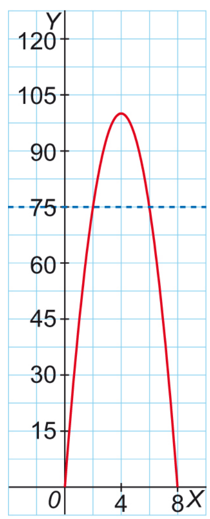
$100t - 25t^2 > 75 \Leftrightarrow 0 > 25t^2 - 100t + 75 \Leftrightarrow 0 > 25(t-1)(t-3) \Rightarrow t \in (1,3)$.

La intensidad lumínica es superior al 75 % entre el minuto 1 y 3.

<u>Observación</u>. La función $L(t) = 25t(4-t)$ es la parábola de la figura adjunta.

Su máximo, 100, se obtiene en $t = 2$.

Entre $t = 1$ y $t = 3$, la función supera el valor 75.



Cuestión 3

Las matrices dadas son: $A=\begin{pmatrix}1&5\\5&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1&-1\\m&n\end{pmatrix}$.

a) Hay que comprobar que $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$.

En efecto:

$$A-B=\begin{pmatrix}1&5\\5&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\4&1\end{pmatrix};\qquad A+B=\begin{pmatrix}1&5\\5&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&6\\6&1\end{pmatrix}.$$

Luego:

$$(A-B)(A+B)=\begin{pmatrix}1&4\\4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&6\\6&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25&10\\10&25\end{pmatrix}.$$

Por otra parte:

$$A^2=\begin{pmatrix}1&5\\5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&5\\5&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}26&10\\10&26\end{pmatrix};\qquad B^2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

De donde,

$$A^2-B^2=\begin{pmatrix}26&10\\10&26\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25&10\\10&25\end{pmatrix}.$$

Puede observarse que, efectivamente, se cumple que $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$.

Observación: En general no se cumple la igualdad $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$, pues el producto de matrices no es conmutativo. Pero, como en este caso, el producto sí es conmutativo, se verificará la igualdad dada. Bastaría con comprobar que $AB=BA$.

$$AB=\begin{pmatrix}1&5\\5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&1\\1&5\end{pmatrix};\qquad BA=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&5\\5&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&1\\1&5\end{pmatrix}$$

b) Si $BC=CB\Rightarrow\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\m&n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\m&n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

Multiplicando se tiene: $\begin{pmatrix}m&n\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\n&m\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}m=-1\\n=1\end{cases}$.

Cuestión 4

a) Sean:

x el número de monedas inicial en la primera pila.

y el número de monedas inicial en la segunda pila.

z el número de monedas inicial en la tercera pila.

Las monedas en cada una de las pilas se indican en la siguiente tabla.

	Pila 1	Pila 2	Pila 3
Primer trasvase de monedas	x	$y+12$	$z-12$
Segundo trasvase de monedas	$x+10$	$y+12-10$	$z-12$

Como el número de monedas tras los sucesivos trasvases es el mismo en cada pila se obtiene la siguiente cadena de igualdades:

$$x+10=y+2=z-12 \Leftrightarrow \begin{cases} x+10=z-12 \\ y+2=z-12 \end{cases}.$$

Resulta un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas; un sistema indeterminado, con solución:

$$\begin{cases} x=z-22 \\ y=z-14 \end{cases}$$

Por lo tanto, de su solución podría decirse que *z* debe ser mayor o igual a 22.

b) Si se sabe que el total de monedas es igual a 51, el sistema se completa con una ecuación más:

$$\begin{cases} x+y+z=51 \\ x=z-22 \\ y=z-14 \end{cases}.$$

Su solución se obtiene de manera inmediata por sustitución:

$$\begin{cases} x+y+z=51 \\ x=z-22 \\ y=z-14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (z-22)+(z-14)+z=51 \\ x=z-22 \\ y=z-14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3z=87 \to z=29 \\ x=29-22=7 \\ y=29-14=15 \end{cases}.$$

Inicialmente, en el primer montón había 7 monedas; en el segundo, 15 monedas; en el tercero, 29 monedas.

Cuestión 5

a) Se trata de un problema de programación lineal.

Las variables de decisión: x nº de aviones de tipo A y nº de aviones de tipo B

Con los datos del problema se forma la siguiente tabla:

	Pasajeros	Mercancías (toneladas)	Coste
nº de aviones de tipo $A(x)$	$200x$	$6x$	$4000x$
nº de aviones de tipo $B(y)$	$100y$	$15y$	$1000y$
Necesidades	1600	96	

El objetivo es minimizar el coste: $C(x, y) = 4000x + 1000y$

Sujeto a:

$0 \leq x \leq 11 \Rightarrow$ hay un máximo de 11 aviones del tipo A.

$0 \leq y \leq 8 \Rightarrow$ hay un máximo de 8 aviones del tipo B.

$200x + 100y \geq 1600 \Rightarrow$ hay que transporte un mínimo de 1600 personas.

$6x + 15y \geq 96 \Rightarrow$ hay que transporte un mínimo de 96 toneladas de equipaje y mercancías.

La región factible es la sombreada en la figura adjunta. Se obtiene representando las rectas asociadas a las inecuaciones anteriores.

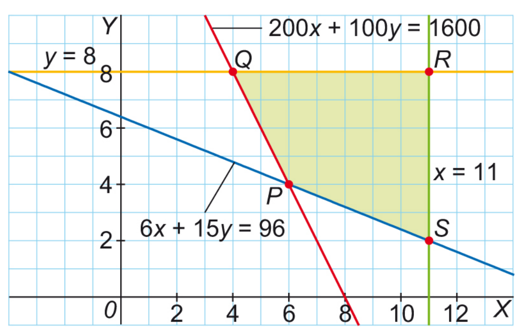
Las coordenadas de los vértices se calculan resolviendo los sistemas que se indican a continuación:

P: $\begin{cases} 200x + 100y = 1600 \\ 6x + 15y = 96 \end{cases} \Rightarrow P(6, 4)$;

Q: $\begin{cases} y = 8 \\ 200x + 100y = 1600 \end{cases} \Rightarrow Q(4, 8)$;

$R(11, 8)$;

S: $\begin{cases} x = 11 \\ 6x + 15y = 96 \end{cases} \Rightarrow S(11, 2)$.



b) Como se trata de una región cerrada, la solución óptima (en este caso el coste mínimo), se da en alguno de los vértices anteriores.

El coste en cada uno de esos vértices es:

En P, $C(6,4) = 4000 \cdot 6 + 1000 \cdot 4 = 28\,000$ €.

En Q, $C(4,8) = 4000 \cdot 4 + 1000 \cdot 8 = 24\,000$ €.

En R, $C(11,8) = 4000 \cdot 11 + 1000 \cdot 8 = 52\,000$ €.

En S, $C(11,2) = 4000 \cdot 11 + 1000 \cdot 2 = 46\,000$ €.

El coste mínimo, que es de 24 000 €, se obtiene contratando 4 aviones del tipo *A* y 8 del tipo *B*.

Cuestión 6

a) Si la gráfica de la función $f(x) = -x^2 + bx + c$ pasa por el punto (–1, 0) $\Rightarrow$ $f(-1) = 0$.

Si, además, tiene un extremo local en el punto de abscisa $x = 3 \Rightarrow f'(3) = 0$.

Esto es:

$f(-1) = 0 \Rightarrow -1 - b + c = 0$; $\qquad f'(x) = -2x + b \Rightarrow -6 + b = 0 \Rightarrow b = 6$; $c = 7$.

La función es $f(x) = -x^2 + 6x + 7$, cuya gráfica es una parábola cóncava ($\cap$). Por tanto, el extremo relativo es un máximo.

También puede verse haciendo la derivada segunda y comprobar que es negativa.

En efecto: $f''(x) = -2 < 0$.

b) Para el caso $b = 3$ y $c = 2$, la función es $f(x) = -x^2 + 3x + 2$.

La ecuación de la recta tangente en un punto genérico, x_0, de su gráfica es: $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

Si se quiere que la recta tangente sea paralela a la recta $y = 5x - 2$, entonces $f'(x_0) = 5$.

Derivando e igualando a 5:

$$f'(x) = -2x + 3 = 5 \Rightarrow x = -1.$$

La recta tangente pedida será:

$$y - f(-1) = 5(x+1) \Rightarrow y - (-2) = 5(x+1) \Rightarrow y = 5x + 3.$$