**SERIE 1**

**Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.**

**Cada qüestió val 2 punts.**

**Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.**

## Cuestión 1

**Siguin les matrius** $M=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\\ t & 2\end{pmatrix}$ **i** $N=\begin{pmatrix}-1 & t & 2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$**.**

**a) (1 punt) Calculeu** $MN$ **i comproveu que la matriu resultant no és invertible.**

**b) (1 punt) Trobeu els valors de** $t$ **per als quals la matriu** $NM$ **és invertible.**

## Cuestión 2

**Sigui** $r$ **la recta que passa pels punts** $A(0, 1, 1)$ **i** $B(1, 1, -1)$**.**

**a) (1 punt) Trobeu l'equació paramètrica de la recta** $r$**.**

**b) (1 punt) Calculeu tots els punts de la recta** $r$ **que estan a la mateixa distància dels plans** $\pi_1 : x+y=-2$ **i** $\pi_2 : x-z=1$**.**

**Nota: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades** $(x_0, y_0, z_0)$ **al pla d'equació** $Ax+By+Cz+D=0$ **amb l'expressió** $\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$**.**

## Cuestión 3

**Sigui la funció** $f(x)=x^3-x^2$**.**

**a) (1 punt) Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica i que és paral·lela a la recta d'equació** $x+3y=0$**.**

**b) (1 punt) Calculeu, si n'hi ha, els punts de la gràfica en què la funció presenta un màxim o mínim relatiu o un punt d'inflexió.**

## Cuestión 4

**Considereu els punts $P(3, -2, 1)$, $Q(5, 0, 3)$, $R(1, 2, 3)$ i la recta $r: \begin{cases} x+y+1=0 \\ 2y+3z-5=0 \end{cases}$.**

**a) (1 punt) Determineu l'equació general (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla que passa per $P$ i $Q$ i és paral·lel a la recta $r$.**

**b) (1 punt) Donats el pla $x + 2y + mz = 7$ i el pla que passa per $P$, $Q$ i $R$, trobeu m perquè siguin paral·lels i no coincidents.**

## Cuestión 5

**Sigui la funció $f(x) = \sqrt{x} + x - 2$.**

**a) (1 punt) Comproveu que la funció $f(x)$ compleix l'enunciat del teorema de Bolzano a l'interval $[0,2]$ i que, per tant, l'equació $f(x) = 0$ té alguna solució a l'interval $(0, 2)$. Comproveu que $x = 1$ és una solució de l'equació $f(x) = 0$ i raoneu, tenint en compte el signe de $f'(x)$, que la solució és única.**

**b) (1 punt) A partir del resultat final de l'apartat anterior, trobeu l'àrea limitada per la gràfica de la funció $f(x)$, l'eix de les abscisses i les rectes $x = 0$ i $x = 1$.**

## Cuestión 6

**Uns estudiants de batxillerat han programat un full de càlcul com el de la figura següent que dona la solució d'un sistema d'equacions compatible determinat d'una manera automàtica:**

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | $x$ | $y$ | $z$ | | | sistema: | COMPATIBLE DETERMINAT | | |
| 5 | | | | | | | | | | | |
| 6 | | | 1 | 2 | −1 | −6 | | $x = 1$ | | | |
| 7 | | | 1 | −1 | −2 | −3 | | | | | |
| 8 | | | 2 | 1 | 2 | 6 | | $y = -2$ | | | |
| 9 | | | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | $z = 3$ | | | |
| 11 | | | | | | | | | | | |
| 12 | | | | | | | | | | | |

**a) (1 punt) Escriviu el sistema i comproveu que els valors proposats com a solució són correctes.**

**b) (1 punt) Quin valor s'hauria de posar en lloc del 2 que està emmarcat en la imatge, corresponent a la cel·la $E_8$ ($a_{33}$ de la matriu de coeficients), perquè el sistema fos incompatible?**

# SOLUCIÓN

## Cuestión 1

a) $MN = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ t & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & t & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2-t & t^2 & 2t-2 \end{pmatrix}$

Calculamos su determinante:

Si es cero, no tendrá inversa.

$$|MN| = \begin{vmatrix} 1 & t & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2-t & t^2 & 2t-2 \end{vmatrix} = 2t - t^2 - t^2 + 2t^2 - 2t = 0$$

Por lo tanto *MN* no será invertible.

b) $NM = \begin{pmatrix} -1 & t & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ t & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t-1 & 2-t \\ 1-t & 0 \end{pmatrix}$

$$|NM| = \begin{vmatrix} 2t-1 & 2-t \\ 1-t & 0 \end{vmatrix} = -(2-t)(1-t) = 0 \Rightarrow t = 2,\ t = 1$$

Por lo tanto, para todo valor de $t$ distinto de 1 y 2, la matriz será invertible.

**Cuestión 2**

a) $\vec{v}_r = \overrightarrow{AB} = (1-0, 1-1, -1-1) = (1, 0, -2)$

Sabiendo que pasa por $A(0, 1, 1)$ entonces la ecuación paramétrica de la recta $r$ es:

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = 1-2\lambda \end{cases}$$

b) Sabiendo que $d(P,\pi) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, entonces imponemos que la distancia de un punto genérico de la recta $r$ a cada uno de los planos sea igual:

Reescribimos los planos como $\pi_1 : x + y + 2 = 0$ y $\pi_2 : x - z - 1 = 0$.

$$d(P,\pi_1) = d(P,\pi_2) \Rightarrow \frac{|\lambda+1+2|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{|\lambda-1+2\lambda-1|}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}} \Rightarrow \frac{|\lambda+3|}{\sqrt{2}} = \frac{|3\lambda-2|}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\lambda+3| = |3\lambda-2|.$$

Por tanto:

$$\lambda + 3 = -3\lambda + 2 \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{4}$$

$$\lambda + 3 = 3\lambda - 2 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{5}{2}$$

Sustituyendo $\lambda_1 = -\dfrac{1}{4}$ en $r$ se tiene $P_1\left(-\dfrac{1}{4}, 1, \dfrac{3}{2}\right)$.

Sustituyendo $\lambda_2 = \dfrac{5}{2}$ en $r$ se tiene $P_2\left(\dfrac{5}{2}, 1, -4\right)$.

**Cuestión 3**

a) Como ha de ser paralela a la recta $x + 3y = 0$, entonces $y = -\frac{1}{3}x$, la pendiente tiene que ser igual a $-\frac{1}{3}$.

Buscamos los puntos de la derivada de la función que tienen por pendiente $-\frac{1}{3}$:

$$f'(x) = -\frac{1}{3} \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2x = -\frac{1}{3} \Rightarrow 9x^2 - 6x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 36}}{18} = \frac{1}{3}.$$

Luego para $x = \frac{1}{3} \Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{-2}{27}$.

Así, la ecuación de la recta tangente demandada será: $y - \left(-\frac{2}{27}\right) = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{3}\right)$, que se puede escribir como $y = -\frac{x}{3} + \frac{1}{27}$.

b) Calculamos los máximos y mínimos y puntos de inflexión:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(3x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \frac{2}{3}$$

Hallamos $f''(x)$: $f''(x) = 6x - 2$

$f''(0) = -2 < 0 \Rightarrow$ Máximo en (0, 0).  $f''\left(\frac{2}{3}\right) = 2 > 0 \Rightarrow$ Mínimo en $\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{27}\right)$.

Buscamos los puntos de inflexión:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow f''(x) = 6x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

Para estudiar si es un punto de inflexión, estudiamos el signo de la derivada segunda en torno al punto:

$$\begin{cases} f''(0) = -2 < 0 \\ f''(2) = 10 > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ hay un cambio en la concavidad en el punto } x = \frac{1}{3}.$$

$x = \frac{1}{3} \Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{27}$. Por tanto $f(x)$ tiene un punto de inflexión en $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{27}\right)$.

**Cuestión 4**

a) Realizamos el producto vectorial de los dos planos que forman la recta *r* para hallar su vector director:

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (3,-3,2)$$

Por otro lado, el vector firmado por los dos puntos pertenecientes al plano será:

$$\overrightarrow{PQ} = (5-3, 0+2, 3-1) = (2,2,2) \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (1,1,1)$$

Buscamos el vector normal del plano que sea perpendicular a $\vec{v}_r = (3,-3,2)$ y $\overrightarrow{PQ} = (1,1,1)$:

$$\vec{n}_\pi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-5,-1,6)$$

La ecuación general del plano será: $\pi : -5x - y + 6z = D$.

Imponemos que pase por el punto $P(3, -2, 1)$:

$$P \in \pi \Rightarrow \pi : -5 \cdot 3 + 2 + 6 = D \Rightarrow D = 7.$$

Por lo tanto $\pi : -5x - y + 6z = 7$.

b) Los dos planos son paralelos si los vectores normales son proporcionales. El vector normal del plano $x + 2y + mz = 7$ es $\vec{n}_1 = (1,2,m)$.

Calculamos el vector normal al plano que pasa por *P*, *Q* y *R*:

Los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ son:

$$\overrightarrow{PQ} = (1,1,1) \qquad \overrightarrow{PR} = (1-3, 2+2, 3-1) = (-2,4,2) \Rightarrow \overrightarrow{PR} = (-1,2,1)$$

El vector normal del plano es: $\vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1,-2,3)$.

Los dos planos son paralelos si los vectores normales son proporcionales, entonces:

$$\frac{1}{-1} = \frac{2}{-2} = \frac{m}{3} \Rightarrow m = -3.$$

Los planos no son coincidentes porque $Q(5, 0, 3)$ no pertenece al plano $x + 2y - 3z = 7$ porque $5 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 3 = 4 \neq 7$.

**Cuestión 5**

a) Enunciamos el teorema de Bolzano:

Si $f$ es una función real y continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y, además, se cumple que signo $f(a) \neq$ signo $f(b)$, entonces existe al menos un $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

La función es continua en todo el intervalo, ya que cada una de las funciones que forman los sumandos son continuas.

Hallamos los valores de la función en los extremos del intervalo:

$$f(0) = -2 < 0\,,\ f(2) = \sqrt{2} + 2 - 2 = \sqrt{2} > 0$$

Tienen signo diferente, por lo que podemos resumir que existe $c \in (0,2)$ tal que $f(c) = 0$. Es decir que cortará al eje $X$.

Comprobamos que $x = 1$ es una solución de

$$f(x) = \sqrt{x} + x - 2 = 0 \Rightarrow f(x) = \sqrt{1} + 1 - 2 = 2 - 2 = 0\,.$$

Por otro lado, la función derivada, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 1$ será siempre positiva para todo el dominio, por lo que la función $f(x)$ será estrictamente creciente y podrá tener únicamente un punto de corte en el eje $X$, demostrando la unicidad de la solución $x = 1$.

b) Sabiendo que sólo tiene un punto de corte con el eje $X$, y que la función es estrictamente creciente, el área la podremos calcular directamente como:

$$A = \left|\int_0^1 f(x)dx\right| = \left|\int_0^1 \left(\sqrt{x} + x - 2\right) dx\right| = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_0^1 = \left|\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 2\right| = \left|-\frac{5}{6}\right| = \frac{5}{6}\ \text{u}^2.$$