OPTATIVIDAD: EL ALUMNO DEBERÁ ESCOGER UNA DE LAS DOS OPCIONES Y DESARROLLAR LAS PREGUNTAS DE LA MISMA.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN:

Cada pregunta de la 1 a la 3 se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. La pregunta 4 se puntuará sobre un máximo de 1 punto. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de las cuatro preguntas. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos. Salvo que se especifique lo contrario, los apartados que figuran en los distintos problemas son equipuntuables.

OPCIÓN A

Ejercicio 1

Los trabajadores de un taller artesano elaboran collares y pulseras de bisutería. En la elaboración de un collar se tardan 2 horas, mientras que se emplea 1 hora en la elaboración de una pulsera. Los materiales de los que disponen les permiten fabricar como mucho 50 piezas (entre collares y pulseras) y el tiempo dedicado a su elaboración no puede exceder de 80 horas. Sabiendo que obtienen un beneficio de 5 euros por la venta de un collar y de 4 euros por la venta de una pulsera, utiliza técnicas de programación lineal para calcular el número de collares y pulseras que tienen que elaborar para que su beneficio sea máximo. ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

Ejercicio 2

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} 4-x & \text{si } x<4 \\ x^2-16 & \text{si } x\geq 4 \end{cases}$.

a) Estudia razonadamente la continuidad de $f(x)$.

b) Analiza el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Ejercicio 3

Se quiere estimar el sueldo medio de un trabajador. Para ello se selecciona una muestra de 625 trabajadores y se obtiene un sueldo medio muestral de 1480 €. El sueldo de un trabajador es una variable aleatoria con distribución normal y desviación típica σ igual a 250 €.

a) Halla el intervalo de confianza del 90 % para el sueldo medio de un trabajador.

b) Si se quiere que el error máximo de la estimación del sueldo medio de un trabajador sea de 10€, con una confianza del 99 %, halla el tamaño mínimo de la muestra que se debe elegir.

Ejercicio 4

El 40 % de los internautas utiliza *Dropbox* o *Google Drive* para almacenar archivos en la nube. Sabiendo que el 25 % emplea *Dropbox* y el 20 % emplea *Google Drive*, ¿qué porcentaje de internautas emplea ambos?

OPCIÓN B

Ejercicio 1

Se considera el sistema de ecuaciones lineales, en función del parámetro *a*:

$$\begin{cases} x+3y+z=1 \\ 3x+y+(a-1)z=3 \\ x+y+z=4 \end{cases}$$

a) Clasifica el sistema según sus soluciones para los diferentes valores de *a*.

b) Resuelve el sistema para $a=3$.

Ejercicio 2

Se espera que en los próximos diez años, los beneficios (en millones de euros) de una empresa, vengan dados por la función $P(t)=t^2-10t+16$, donde $t \in (0, 10]$ es el tiempo transcurrido en años desde el momento inicial.

a) Determina en qué momento del tiempo los beneficios serán de 16 millones de euros.

b) Determina en qué momento los beneficios serán mínimos.

Ejercicio 3

Una cadena de supermercados envasa tres variedades de queso en paquetes al vacío, en las proporciones que se indican: curado (45 %), semicurado (30 %) y tierno (25 %). Parte del queso que recibe es de importación, concretamente, el 25 % del queso curado, el 23 % del semicurado y el 20 % del tierno. Se elige al azar un paquete de queso.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea de importación?

b) Si el queso elegido es de importación, ¿qué probabilidad tiene de ser curado?

Ejercicio 4

La probabilidad de que un alumno de Matemáticas apruebe un examen tipo test es del 80 %, mientras que la probabilidad de que apruebe un examen de problemas es del 60 %. Si la probabilidad de aprobar los dos exámenes es del 50 %, calcula la probabilidad de que no apruebe ninguno de los dos exámenes.

SOLUCIÓN DE LA OPCIÓN A

Ejercicio 1

Si se fabrican *x* collares e *y* pulseras, el beneficio será $B(x,y) = 5x + 4y$.

Las restricciones son:

De tiempo: $2x + y \leq 80$ (se dispone de 80 horas como máximo).

De cantidad: $x + y \leq 50$ (pueden fabricarse un máximo de 50 piezas entre collares y pulseras).

No negatividad: $x \geq 0$; $y \geq 0$.

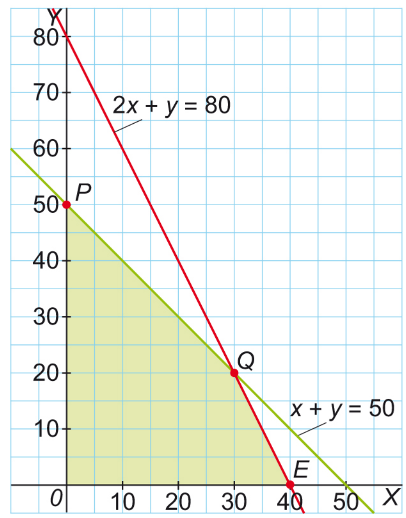
Las restricciones $x \geq 0$ e $y \geq 0$ determinan los puntos del primer cuadrante del plano *XY*.

La restricción $2x + y \leq 80$ determina los puntos situados a la izquierda de la recta $2x + y = 80$.

Dos de sus puntos son: (40, 0) y (0, 80).

La restricción $x + y \leq 50$ determina el semiplano situado a la izquierda de la recta $x + y = 50$.

Dos puntos de la recta son: (50, 0) y (0, 50).



La región factible es la sombreada en la figura adjunta: polígono de vértices *O*, *P*, *Q* y *R*.

Los vértices *O*(40, 0), *P*(0, 50) y *R*(40, 0) se han obtenido al dibujar las rectas.

El vértice *Q* es la solución del sistema $\begin{cases} 2x + y = 80 \\ x + y = 50 \end{cases} \Rightarrow Q(30, 20)$.

Como se trata de una región cerrada, el máximo de la función $B(x,y) = 5x + 4y$ se da en alguno de sus vértices.

El valor en cada uno de ellos es:

En *O*, $B(0,\ 0) = 0$.

En *Q*, $B(30,\ 20) = 5 \cdot 30 + 4 \cdot 20 = 230$ €.

En *P*, $B(0,\ 50) = 5 \cdot 0 + 4 \cdot 50 = 200$ €.

En *R*, $B(40,\ 0) = 5 \cdot 40 + 4 \cdot 0 = 200$ €.

El beneficio máximo asciende a 230 euros y se obtiene fabricando 30 collares y 20 pulseras.

Ejercicio 2

La función es $f(x) = \begin{cases} 4 - x & \text{si } x < 4 \\ x^2 - 16 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$.

a) Cada una de las funciones que definen la función $f(x)$ es continua en su dominio de definición.

La única duda se presenta en $x = 4$. Será continua si los límites laterales coinciden con su valor de definición, que es $f(4) = 4^2 - 16 = 0$.

Por la izquierda: $\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} (4 - x) = 0$.

Por la derecha: $\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} (x^2 - 16) = 16 - 16 = 0$.

La función es continua en $x = 4$ y, por tanto, en $\mathbb{R}$.

b) Derivando:

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 4 \\ 2x & \text{si } x > 4 \end{cases}.$$

La derivada es negativa siempre que $x < 4 \Rightarrow$ la función es decreciente si $x < 4$.

La derivada es positiva siempre que $x > 4 \Rightarrow$ la función es creciente si $x > 4$.

En el punto $x = 4$ la función no es derivable.

Ejercicio 3

a) El intervalo de confianza de la media poblacional, para las muestras de tamaño *n* es:

$$IC_{1-\alpha}(\mu)=\left(\overline{X}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

siendo: $\overline{X}$, la media de la muestra; σ, la desviación típica de la población; y $z_{\alpha/2}$, el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de $1-\alpha$.

Para $\overline{X}=1480$, $\sigma=250$, $n=625$ y, para el 90 % de confianza ($1-\alpha/2=0{,}9500$), $z_{\alpha/2}=1{,}645$, se tiene:

$$IC_{0,90}(\mu)=\left(1480-1{,}645\frac{250}{\sqrt{625}};\ 1480+1{,}645\frac{250}{\sqrt{625}}\right)=$$

$$=\left(1480-16{,}45;\ 1480+16{,}45\right)=\left(1463{,}55;\ 1496{,}45\right)$$

b) El error máximo viene dado por $E=z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Si se quiere que $E=10$, con una confianza del 99 % ($z_{\alpha/2}=2{,}575$), se tendrá:

$$2{,}575\frac{250}{\sqrt{n}}\le 10\Rightarrow\sqrt{n}>64{,}375\Rightarrow n\ge 4144{,}14$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser $n=4145$.

Ejercicio 4

Se consideran los sucesos:

D = "el internauta utiliza *Dropbox*";

G = "el internauta utiliza *Google Drive*"

Por los datos del problema se conocen las siguientes probabilidades:

$$P(D \cup G) = 0{,}40\ ;\quad P(D) = 0{,}25\ ;\quad P(G) = 0{,}20$$

Como

$$P(D \cup G) = P(D) + P(G) - P(D \cap G) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}40 = 0{,}25 + 0{,}20 - P(D \cap G) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(D \cap G) = 0{,}05\,.$$

El 5 % de los internautas utiliza ambos sistemas para almacenar archivos.