INDICACIONES:

1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cuatro ejercicios de la misma en el orden que desee.

2.-CALCULADORA: Se permitirá el uso de calculadoras no programables (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 4 primeros ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2,25 puntos, y el quinto ejercicio sobre un máximo de 1 punto. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1

Sean $A=\begin{pmatrix}1 & -4\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ el sistema

a) Estudiar si A y B tienen inversa y calcularla cuando sea posible. (1 punto)

b) Determinar X tal que $AX=2B+I$ siendo $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. (1,25 puntos)

Ejercicio 2

Determinar la recta r que es paralela al plano $\pi \equiv x-y-z=0$ y que corta perpendicularmente a la recta $s\equiv \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-2}{-4}$ en el punto $P(2,-1,-2)$. (2,25 puntos)

Ejercicio 3

a) Enunciar el teorema de Bolzano e interpretarlo geométricamente. (1 punto)

b) Encontrar un intervalo en el que $P(x)=x^6+x^4-1$ tenga al menos una raíz. (1,25 puntos)

Ejercicio 4

a) Calcular la recta tangente a la curva $f(x)=4e^{x-1}$ en el punto $(1, f(1))$. (1 punto)

b) Calcular el área de la región delimitada en el primer cuadrante por la gráfica de la función $g(x)=x^3$ y la recta $y=4x$. (1,25 puntos)

Ejercicio 5

Se lanzan dos dados (con forma cúbica) al aire. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los puntos sea 8?

OPCIÓN B

Ejercicio 1

a) Discutir el siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro λ :

$$\begin{cases} x + \lambda y + \lambda z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + 2y + 4z = 2 \end{cases} \quad \text{(1,25 puntos)}$$

b) Resolverlo para $\lambda = 1$. (1 punto)

Ejercicio 2

Dado el plano $\pi \equiv 3x + y + z - 2 = 0$ y los puntos $P(0,\ 1,\ 1)$, $Q(2,\ 1,\ 3)$ que pertenecen al plano π, determinar la recta del plano π que pasa por el punto medio entre P y Q y es perpendicular a la recta que une estos puntos. (2,25 puntos)

Ejercicio 3

a) Dado el polinomio $P(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2} + 2x + C$, hallar C para que el valor de $P(x)$ en su mínimo relativo sea 1. (1,25 puntos)

b) Calcular $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x$. (1 punto)

Ejercicio 4

Sea $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si} \quad x \le 1 \\ a + \ln x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

a) Encontrar a para que la función sea continua. (1 punto)

b) Hallar el área de la región delimitada por la gráfica de $f(x)$ y las rectas $x = 1$, $y = 1$. (1,25 puntos)

Ejercicio 5

La probabilidad de obtener cara al lanzar una moneda es $\dfrac{1}{2}$. ¿Cuál es la probabilidad de sacar 3 caras en tres lanzamientos? (1 punto)

SOLUCIÓN DE LA OPCIÓN A

Ejercicio 1

a) Las matrices A y B tendrán inversa si sus determinantes son distintos de cero

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow$ existe la inversa de A y

$$A^{-1} = \frac{(\text{Adj}(A))^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ no existe la inversa de B

b) Tenemos

$$AX = 2B + I \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(2B + I) \Rightarrow X = A^{-1}(2B + I)$$

Por tanto,

$$X = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\left[2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2

La recta r tendrá por vector director, $\vec{v}_r$, un vector perpendicular al vector normal del plano π, $\vec{n}_\pi = (1, -1, -1)$, y perpendicular también al vector director de la recta s, $\vec{v}_s = (1, 2, -4)$.

Por tanto, $\vec{v}_r$ es el producto vectorial de $\vec{n}_\pi$ y $\vec{v}_s$:

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -6\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k} = (-6, -3, -3) \propto (2, 1, 1)$$

De este modo, la ecuación continua de la recta r es

$$r \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{1}$$

Ejercicio 3

a) Si f es una función real y continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y, además, signo $f(a) \neq$ signo $f(\mathrm{b})$, entonces existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$

Si dos puntos de la gráfica de una función continua f están situados a diferentes lados del eje X, entonces la gráfica de f cortará necesariamente al eje X en algún punto situado entre ellos.

b) La función $P(x) = x^6 + x^4 - 1$ es continua en cualquier intervalo cerrado, por lo que basta encontrar dos valores en los que cambie el signo de P.

Por ejemplo, $P(0) = -1 < 0$ y $P(1) = 1 > 0$, por lo que, según el Teorema de Bolzano, $P(x)$ tiene al menos una raíz en el intervalo [–1, 1]

Ejercicio 4

a) La recta tangente a f en el punto $(1, f(1))$ es

$$y - f(1) = f'(1)(x-1)$$

Tenemos $f(1) = 4e^0 = 4$ y $f'(x) = 4e^{x-1} \Rightarrow f'(1) = 4e^0 = 4$, por tanto, la recta tangente es

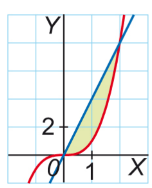
$$y - 4 = 4(x-1) \Rightarrow \mathrm{y} = 4\,\mathrm{x}$$

b) Observemos que ambas funciones cortan a los ejes en el origen, además, los puntos de corte entre ambas funciones son:

$$x^3 = 4x \Rightarrow x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2-4) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = -2,\ x = 2$$

Por tanto, en el primer cuadrante, los límites de integración son $x = 0$ y $x = 2$, con lo que el área pedida es

$$A = \left|\int_0^2 x^3 - 4x\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_0^2\right| = |4-8| = 4\ \mathrm{u}^2$$



Ejercicio 5

Consideremos el suceso A = “la suma de los puntos de los dos dados es 8”, observemos que hay 36 posibles casos equiprobables para la suma de los puntos de los dos dados, siendo los casos favorables al suceso A los siguientes

$$\{2+6,\ 6+2,\ 3+5,\ 5+3,\ 4+4\}$$

Por tanto, aplicando la regla de Laplace,

$$P(A) = \frac{\text{nº de casos favorables al suceso } A}{\text{nº de casos posibles}} = \frac{5}{36} = 0{,}139$$