OPTATIVIDAD: EL ALUMNO DEBERÁ ESCOGER UNA DE LAS DOS OPCIONES Y DESARROLLAR LAS PREGUNTAS DE LA MISMA.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN:

Cada pregunta de la 1 a la 3 se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. La pregunta 4 se puntuará sobre un máximo de 1 punto. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de las cuatro preguntas. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos. Salvo que se especifique lo contrario, los apartados que figuran en los distintos problemas son equipuntuables.

OPCIÓN A

Ejercicio 1

Se considera el sistema de ecuaciones lineales, dependiente del parámetro real *a*

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x - y + z = 3 \\ y - az = 2 \end{cases}$$

a) Clasifica el sistema según su número de soluciones para los distintos valores de *a*.

b) Resuelve el sistema para $a = 2$.

Ejercicio 2

La función:

$$f(x) = \begin{cases} 20x^2 - 20x + 32 & \text{si } 0 < x \le 1 \\ \dfrac{90x - 45}{x + 8} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

representa el beneficio, en miles de euros, de cierta empresa transcurridos *x* meses.

a) Estudia razonadamente la continuidad de la función $f(x)$.

b) Halla los intervalos donde se produce un aumento del beneficio y una disminución del beneficio. ¿En qué momento el beneficio es mínimo?

c) Determina el beneficio de la empresa a muy largo plazo.

Ejercicio 3

La lista electoral de un determinado partido político está formada por un número igual de hombres y mujeres. Un análisis sociológico de dichas listas revela que el 60 % de los hombres tienen 40 o más años de edad, mientras que el 30 % de las mujeres tienen menos de 40 años. Se elige al azar una persona que forma parte de las listas electorales.

a) Calcula la probabilidad de que tenga menos de 40 años.

b) Sabiendo que tiene 40 o más años de edad, calcula la probabilidad de que sea mujer.

Ejercicio 4

El diámetro de las piezas fabricadas por cierta máquina sigue una distribución normal con desviación típica poblacional $\sigma = 0{,}042$ cm. Se elige una muestra representativa de 200 piezas fabricadas por la máquina, resultando un diámetro medio muestral de 0,824 cm. Halla el intervalo de confianza al 95 % para el diámetro medio poblacional de las piezas fabricadas por esa máquina.

OPCIÓN B

Ejercicio 1

Queremos conseguir al menos 210 kg de hidratos de carbono y al menos 100 kg de proteínas adquiriendo dos alimentos *A* y *B* que sólo contienen estos dos nutrientes. Cada kg de *A* contiene 0,6 kg de hidratos de carbono y 0,4 kg de proteínas. Cada kg de *B* contiene 0,9 kg de hidratos de carbono y 0,1 kg de proteínas. Si los costes de *A* y *B* son 12 y 6 euros por kg, respectivamente, utiliza técnicas de programación lineal para calcular cuántos kg de cada alimento hay que adquirir para que el coste sea mínimo. ¿A cuánto asciende ese coste mínimo?

Ejercicio 2

a) Calcula el valor de *a* que hace que el valor de la derivada de la función $y = ax^3 + 6x^2 - ax - 18$, en los puntos de abscisa $x = -2$ y $x = 1$, sean iguales.

b) Sabiendo que la curva $y = ax^3 + 6x^2 - ax - 18$ pasa por el punto (2, 12), calcula el valor de *a* y las coordenadas del punto de la curva donde se anula la segunda derivada.

Ejercicio 3

El gasto por cliente en un supermercado sigue una distribución normal con media μ euros (desconocida) y desviación típica $\sigma = 10$ euros. Se elige una muestra representativa de 225 clientes, resultando una suma total de sus gastos de 2587,50 euros.

a) Determina un intervalo de confianza del 99 % para el gasto medio por cliente.

b) Calcula el tamaño mínimo de la muestra de clientes que permita alcanzar, con una confianza del 95 %, un error máximo de 1,20 euros en la estimación del gasto medio por cliente.

Ejercicio 4

En una clase con 15 alumnos de segundo de bachillerato, 2 alumnos están jugando al mus y 5 están jugando al tute, mientras que el resto de alumnos no está jugando a las cartas. Si se eligen al azar dos alumnos, ¿qué probabilidad hay de que ninguno de los elegidos estén jugando a las cartas?

SOLUCIÓN DE LA OPCIÓN A

Ejercicio 1

a) Sea A la matriz de coeficientes *y* A^* la matriz ampliada.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a\end{pmatrix};\quad A^*=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -a & 2\end{pmatrix}$$

Si $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=3 \Rightarrow$ sistema compatible determinado: solución única.

Si $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)<3 \Rightarrow$ sistema compatible indeterminado: infinitas soluciones.

Si $\text{rg}(A)<\text{rg}(A^*) \Rightarrow$ sistema incompatible: no tiene solución.

El determinante de A vale: $|A|=-a-1$. Luego, $|A|=0$ si $a=-1$.

Con esto:

Si $a\neq -1 \Rightarrow \text{rg}(A)=3=\text{rg}(A^*)$. El sistema será compatible determinado.

Si $a=-1$, se tendrá: $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix};\quad A^*=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$

El menor $\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$ y $|A|=0 \Rightarrow \text{rg}(A)=2$.

Como $\begin{vmatrix}-1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=1+2\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*)=3$.

El sistema será incompatible.

b) Para $a=2$, el sistema es compatible determinado.

Puede resolverme aplicando transformaciones de Gauss.

$$\begin{cases}x-y=-1\\ 2x-y+z=3\\ y-2z=2\end{cases}\xrightarrow[E_2\to E_2-E_1]{}\begin{cases}x-y=-1\\ y+z=5\\ y-2z=2\end{cases}\xrightarrow[E_3\to E_3-E_2]{}\begin{cases}x-y=-1\\ y+z=5\\ -3z=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\ y=4\\ z=1\end{cases}.$$

Ejercicio 2

La función es $f(x)=\begin{cases} 20x^2-20x+32 & \text{si } 0<x\leq 1 \\ \dfrac{90x-45}{x+8} & \text{si } x>1 \end{cases}$

a) Cada una de las funciones dadas es continua en su dominio de definición.

La única duda se presenta en $x=1$. Será continua si los límites laterales coinciden con su valor de definición, que es $f(1)=32$.

Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(20x^2-20x+32\right)=32$.

Por la derecha: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{90x-45}{x+8}+27\right)=\dfrac{90-45}{5+8}+27=32$.

La función es continua para todo $x>0$.

b) Derivando: $f'(x)=\begin{cases} 40x-20 & \text{si } 0<x<1 \\ \dfrac{765}{(x+8)^2} & \text{si } x>1 \end{cases}$.

La derivada de $f(x)=\dfrac{90x-45}{x+8}+27\Rightarrow f'(x)=\dfrac{90(x+8)-(90x-45)1}{(x+8)^2}=\dfrac{765}{(x+8)^2}$.

Se estudia el signo de la derivada: $40x-20=0\Rightarrow x=0{,}5$.

Para los valores de x tales que $0<x<0{,}5$, $f'(x)<0 \Rightarrow$ la función decrece en ese intervalo.

Para $0{,}5<x<1$, $f'(x)>0 \Rightarrow$ la función crece en ese intervalo.

Como la función decrece en el intervalo (0; 0,5) y crece en el intervalo (0,5; 1) se concluye que en el punto x = 0,5 la función tiene un mínimo: a mediados del primer mes el beneficio es mínimo.

Para $x>1$, $f'(x)=\dfrac{765}{(x+8)^2}>0$. La función sigue creciendo.

<u>Observación</u>:

Podría exigirse la comprobación de que la función es derivable en el punto $x=1$, dudoso en principio. Hay que ver que las derivadas laterales son iguales.

Como:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(40x-20\right)=20$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{765}{(x+8)^2}=9{,}44...\Rightarrow$ La función no es derivable en $x=$ 1.

c) A muy largo plazo significa que $x \to +\infty$. En ese caso, el beneficio tiende a:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{90x-45}{x+8}+27\right) = 90+27=117 \text{ (miles de euros).}$$

Ejercicio 3

Sean los sucesos:

M = "Ser hombre" H = "Ser mujer"

Sean los sucesos:

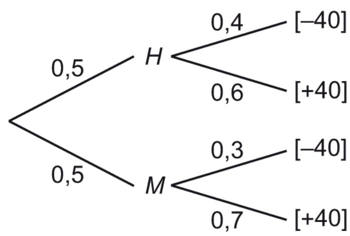
[–40] = "tener menos de 40 años" [+40] = "tener más de 40 años"

De los datos del problema se conocen o deducen las siguientes probabilidades:

$P(H) = 0{,}5$; $P(M) = 0{,}5$; $P([+40]/H) = 0{,}6$; $P([-40]/M) = 0{,}3 \Rightarrow$

$\Rightarrow P([-40]/H) = 0{,}4$; $P([+40]/M) = 0{,}7$.

Puede confeccionarse el siguiente diagrama de árbol.



a) Por la probabilidad total:

$$P([-40]) = P(H)P([-40]/H) + P(M)P([-40]/M) \Rightarrow P([-40]) = 0{,}5\cdot 0{,}4 + 0{,}5\cdot 0{,}3 = 0{,}35 .$$

Se deduce que $P([+40]) = 1 - 0{,}35 = 0{,}65$.

b) Por Bayes:

$$P(M/[+40]) = \frac{P(M\cap[+40])}{P([+40])} = \frac{0{,}5\cdot 0{,}7}{0{,}65} = \frac{7}{13} \simeq 0{,}54 .$$

Ejercicio 4

El intervalo de confianza de la media poblacional, para las muestras de tamaño *n* es:

$$IC_{1-\alpha}(\mu) = \left(\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right).$$

siendo: $\bar{x}$, la media de la muestra; σ, la desviación típica de la población; y $Z_{\alpha/2}$, el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de $1 - \alpha$.

Para $\bar{x} = 0{,}824$, $\sigma = 0{,}042$, $n = 200$ y, para el 95 % de confianza $1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}9750$, $Z_{\alpha/2} = 1{,}96$, se tiene:

$$IC_{0,95}(\mu) = \left(0{,}824 - 1{,}96 \cdot \frac{0{,}042}{\sqrt{200}}; 0{,}824 + 1{,}96 \cdot \frac{0{,}042}{\sqrt{200}} \right) \approx$$

$$\approx (0{,}824 - 0{,}006; 0{,}824 + 0{,}006) = (0{,}818; 0{,}830).$$