INDICACIONES:

1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cuatro ejercicios de la misma en el orden que desee.

2.-CALCULADORA: Se permitirá el uso de calculadoras no programables (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Cada ejercicio se puntuará sobre un máximo de 2,5 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1

a) (1,2 puntos) Discutir el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro λ:

$$\begin{cases} \lambda x + z = 1 \\ x + y + \lambda z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

b) (0,8 puntos) Resolverlo para $\lambda = 1$.

Ejercicio 2

(2 puntos) Determinar la recta s que es simétrica de $r : x + 2 = y = z - 2$, respecto del plano $\pi : x - z + 2 = 0$.

Ejercicio 3

(2 puntos) Dada la función $f(x) = 3x^4 + x^3 - 1$ determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus extremos relativos y el número total de puntos en los que $f(x)$ se anula.

Ejercicio 4

(2 puntos) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = x\cos x$ y el eje de las X, cuando x pertenece al intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ejercicio 5

a) **(1 punto) Se tira una moneda tres veces. Calcular la probabilidad de que, sin tener en cuenta el orden, salgan una cara y dos cruces.**

b) **(1 punto) Una persona elige al azar, sin verlas, dos cartas de una baraja española (de 40 cartas, de las cuales 10 son de cada uno de los 4 palos: oros, copas, espadas y bastos). Calcular la probabilidad de que ninguna de las dos cartas elegidas sea de copas.**

OPCIÓN B

Ejercicio 1

(2 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ y, calcúlense a y b para que se verifiquen $|MA| = 2$ y $|M+B| = 3$, donde se está usando la notación habitual (con barras verticales) para denotar al determinante de una matriz.

Ejercicio 2

Dada la recta $r: x-1 = \frac{y+1}{2} = z-1$ y el plano $\pi: x-y+z=0$, se pide:

a) **(0,8 puntos) Determinar la posición relativa de r y π.**

b) **(1,2 puntos) Hallar el plano paralelo a π situado a la misma distancia de r que π.**

Ejercicio 3

(2 puntos) Dada la función $f(x) = xe^{-x}$, determínense su dominio de definición, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión. Esbócese también su gráfica.

Ejercicio 4

a) (1 punto) Calcular $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos x}{\ln(1+x)}$.

b) (1 punto) Calcular $\int \dfrac{(\ln x)^2}{x}\,dx$.

Ejercicio 5

(2 puntos) La variable aleatoria IMC (índice de masa corporal, de modo abreviado) de las personas adultas de un determinado país sigue una distribución normal de media 26 y desviación típica de 6. Si tener un IMC superior a 35 significa ser obeso, encontrar la proporción de personas adultas obesas de ese país.

Nota: Se da la tabla de la $N(0,1)$.

SOLUCIÓN DE LA OPCIÓN A

Ejercicio 1

a) Las matrices asociadas al sistema son $A=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 1\\ 1 & 1 & \lambda\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & \lambda & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

Estudiamos los valores de λ para los cuales el determinante de A es 0:

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & 1\\ 1 & 1 & \lambda\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=\lambda-1-1+\lambda^2=\lambda^2+\lambda-2=0\Rightarrow\lambda=\frac{-1\pm\sqrt{1^2+4\cdot1\cdot2}}{2}=\frac{-1\pm3}{2}\Rightarrow\lambda=-2,\ \lambda=1$$

Luego para valores de λ distintos de -2 y 1, $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=$ nº de incógnitas. El sistema será compatible determinado.

Para $\lambda=1$: $A^*=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ y $\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}\neq0$

Entonces $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=2<$ nº de incógnitas, por lo que será un sistema compatible indeterminado.

Para $\lambda=-2$: $A^*=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ y $\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}\neq0$ por lo que $\text{rg}(A)=2$. Y por otro lado el menor $\begin{vmatrix}-2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=-2-1-1-2\neq0$, por lo que $\text{rg}(A^*)=3$. Será un sistema incompatible.

b) Resolvemos para $\lambda=1$:

$$A^*=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Luego $\begin{cases}x=0\\ x+y=0\\ x-y=0\end{cases}$.

La solución del sistema será $\begin{cases}x=0\\ y=0\\ z=\lambda\end{cases}$.

Ejercicio 2

Escribimos la ecuación de la recta *r* en paramétricas: $r:\begin{cases} x=-2+\lambda \\ y=\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases}$

Calcularemos dos puntos de la recta y hallaremos sus simétricos respecto al plano. La recta que une los puntos simétricos será la recta simétrica respecto del plano.

Dos puntos de *r* son: $P(-2,0,2)$, que se obtiene para $\lambda=0$ y, $Q(-1,1,3)$, que se obtiene para $\lambda=1$.

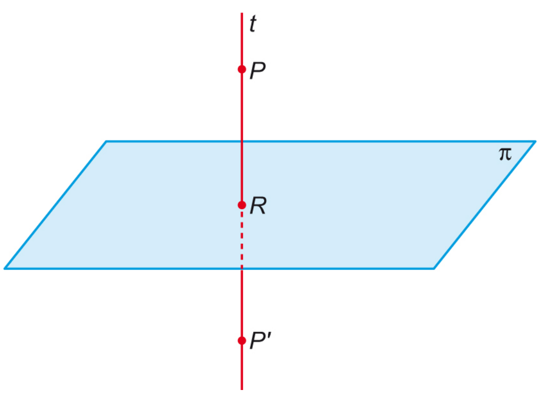
Hallamos los simétricos respecto del plano de los dos puntos anteriores:

Hallamos una recta *t* perpendicular al plano, que pase por *P*.

La recta *r* tiene como vector director $\vec{v}_t=\vec{n}_\pi=(1,0,-1)$, y pasa por *P*(–2, 0, 2), luego: $t:\begin{cases} x=-2+\lambda \\ y=0 \\ z=2-\lambda \end{cases}$

La intersección de *t* con el plano $\pi: x-z+2=0$ nos dará el punto medio entre *P* y *P*' que llamamos *R*:

$$R=t\cap\pi \Rightarrow -2+\lambda-2+\lambda+2=0 \Rightarrow 2\lambda=2 \Rightarrow \lambda=1 \Rightarrow R(-1,0,1)$$



De la definición de *R* como punto medio deducimos las coordenadas de *P*':

$$-1=\frac{-2+x_{P'}}{2} \Rightarrow x_{P'}=0\,;\ 0=\frac{y_{P'}}{2} \Rightarrow y_{P'}=0\,;$$
$$1=\frac{2+z_{P'}}{2} \Rightarrow z_{P'}=0\,.$$

Luego $P'(0,0,0)$.

Hallamos una recta *t*' perpendicular al plano $\vec{v}_{t'}=\vec{n}_\pi=(1,0,-1)$, que pase por $Q(-1,1,3)$: $t':\begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=1 \\ z=3-\lambda \end{cases}$

La intersección de *t*' con el plano $\pi: x-z+2=0$ nos dará el punto medio entre *Q* y *Q*':

$S=t'\cap\pi \Rightarrow -1+\lambda-3+\lambda+2=0 \Rightarrow 2\lambda=2 \Rightarrow \lambda=1 \Rightarrow S(0,1,2)$. Entonces:

$$0=\frac{-1+x_{Q'}}{2} \Rightarrow x_{Q'}=1;\ 1=\frac{1+y_{Q'}}{2} \Rightarrow y_{Q'}=1;\ 2=\frac{3+z_{Q'}}{2} \Rightarrow z_{Q'}=1.$$ Por tanto, $Q'(1,1,1)$.

La recta simétrica *s* será aquella que pase por *Q*’ y *P*’:

$\vec{v}_s=\overrightarrow{P'Q'}=(1,1,1)-(0,0,0)=(1,1,1)$ y la ecuación de $s:\begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$ pasando por $P'(0,0,0)$.

Ejercicio 3

El dominio de $f(x)$ es $D(f) = \mathbb{R}$.

Calculamos la derivada primera: $f'(x) = 12x^3 + 3x^2$

Para hallar los extremos relativos resolvemos $f'(x) = 0$:

$$12x^3 + 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(12x + 3) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = -\frac{1}{4}$$

Estudiamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = 3x^4 + x^3 - 1$:

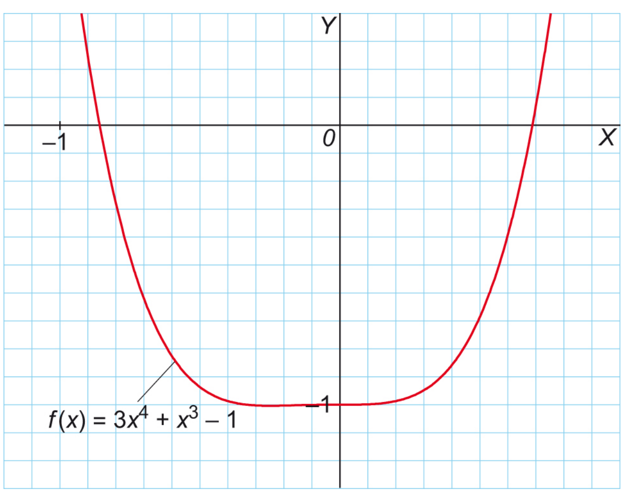
$-\infty \qquad \frac{1}{4} \qquad 0 \qquad +\infty$

$f'(x)$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	↗	↗

Por tanto, $f(x)$ es creciente en $\left(-\frac{1}{4}, +\infty\right)$ y es decreciente $\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right)$.

Calculamos el número en el que $f(x)$ se anula, es decir, hay que resolver $f(x) = 0$: $f(x) = 3x^4 + x^3 - 1 = 0$

Por un lado, vemos que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Y además sólo tiene un mínimo, por lo que la función tendrá dos puntos de corte con el eje *X*, es decir, se anulará en dos puntos.



Podemos esbozar la gráfica teniendo en cuenta su único mínimo relativo en $x = -\frac{1}{4}$, su posible punto de inflexión en $x = 0$, y sus límites en infinito y menos infinito. De ese modo vemos que la única posibilidad compatible con que tenga solo un extremo relativo es la de dos puntos de corte.

Ejercicio 4

Estudiamos los puntos de corte de la función con el eje X en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$f(x) = x\cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Por lo tanto, la función no se anula en ningún punto en el intervalo dado.

Calculamos el área limitada por la curva de $y = f(x)$, el eje de abscisas:

Resolvemos $\int x\cos dx$ integrando por partes:

$$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$$

$$g'(x) = \cos x \Rightarrow g(x) = \int \cos x dx = \operatorname{sen} x \text{ .}$$

Entonces, $\int x\cos x dx = x\operatorname{sen} x + \cos x$

Luego:

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos dx = \left|\left[x\operatorname{sen} x + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right| = \left|\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} - 1\right| = \frac{\pi}{2} - 1 \text{ u}^2.$$

Ejercicio 5

a) Definimos los sucesos:

C = "Obtener cara"; $\overline{C}$ = "No obtener cara"

X = "Obtener cruz"; $\overline{X}$ = "No obtener cruz"

Los sucesos favorables son: *CXX*, *XCX* y *XXC* y además son sucesos independientes.

Por tanto, la probabilidad de obtener una cara y dos cruces es:

$$P(\text{1 cara y dos cruces}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 3 = \frac{3}{8}.$$

b) Definimos el suceso: A = "La carta es de copas".

Tenemos que calcular la probabilidad de que no sean copas ninguna de las dos cartas, es decir, $P\left(\overline{A} \cap \overline{A}\right)$. Como son sucesos no independientes, se tiene:

$$P\left(\overline{A} \cap \overline{A}\right) = \frac{30}{40} \cdot \frac{29}{39} = \frac{29}{52}.$$