Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

Ejercicio 1

(3,25 puntos) Una empresa de transporte va a realizar el transporte de animales de compañía entre dos ciudades. Para ello, va a alquilar furgonetas especializadas en este tipo de transporte, que pueden ser de dos tipos, *A* y *B*. Cada furgoneta de tipo *A* tiene 4 jaulas individuales para perros y 3 jaulas individuales para gatos, mientras que cada furgoneta de tipo *B* tiene 2 jaulas individuales para perros y 6 jaulas individuales para gatos. El coste de alquiler de cada furgoneta de tipo *A* es de 240 euros y el coste de alquiler de cada furgoneta de tipo *B* es de 400 euros. Además, por razones comerciales, el número de furgonetas de tipo *B* debe ser mayor o igual que el número de furgonetas de tipo *A*. La empresa tiene que garantizar espacio para, al menos, 24 perros y 54 gatos. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántas furgonetas de cada tipo debe alquilar para que el coste sea mínimo. ¿Cuál es el valor de ese coste mínimo?

Ejercicio 2

a) (2 puntos) Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + 2x + 2$, con $x \in \mathbb{R}$, encontrar, si existen, *a* y *b* tal que *f* tenga un máximo relativo en $x = -1$ con valor $f(-1) = 2$.

b) (1,25 puntos) Calcular:

$$\int_1^2 \left(7e^{3x} + \frac{4}{3}x^2 - 3\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)dx$$

Ejercicio 3

(3,5 puntos) En una urna hay 2 bolas blancas, 4 bolas negras y 5 bolas rojas. Se extraen dos bolas de la urna, una tras otra sin reemplazamiento. Calcular:

a) (0,75 puntos) La probabilidad de que las dos sean rojas.

b) (1 punto) La probabilidad de que sean de distinto color.

c) (0,75 puntos) La probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja.

d) (1 punto) Sea *A* el suceso “la primera bola extraída es roja” y *B* el suceso “las dos bolas son del mismo color”, ¿son los dos sucesos *A* y *B* independientes?

OPCIÓN B

Ejercicio 1

(3,25 puntos) Una empresa invirtió un total de 10000 euros entre tres fondos *A*, *B* y *C*. El beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo *A* fue de 0,05 euros, el beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo *B* fue de 0,1 euros y el beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo *C* fue de 0,02 euros. Con las inversiones realizadas en los fondos, la empresa obtuvo un beneficio total de 497 euros. Además, la inversión en el fondo *A* fue igual al triple de la suma de las inversiones en los fondos *B* y *C*. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones lineales para determinar cuánto dinero invirtió en cada fondo.

Ejercicio 2

(3,25 puntos) Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x - 5}$$

Calcular:

a) (0,25 puntos) Dominio de *f*.

b) (0,75 puntos) ¿Para qué valores de *f* es la función positiva?

c) (1 punto) Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

d) (1,25 puntos) Sus máximos y mínimos relativos, si existen.

Ejercicio 3

a) (2 puntos) Se sabe que la cantidad de hidratos de carbono de las barritas energéticas de una marca es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 1,5 gramos. Elegimos una muestra aleatoria simple de 75 barritas, les medimos la cantidad de hidratos de carbono y calculamos su promedio, que resulta ser igual a 23,8 gramos. Calcular el intervalo de confianza al 98 % para la media de la cantidad de hidratos de carbono en las barritas de esa marca.

b) (1,5 puntos) Un opositor se sabe 28 de los 40 temas de un examen. En el examen se eligen al azar 2 de los 40 temas. ¿Cuál es la probabilidad de que el opositor se sepa los dos temas? ¿Cuál es la probabilidad de que se sepa al menos uno de los dos temas?

Nota: Se da la tabla Normal (0, 1).

SOLUCIÓN DE LA OPCIÓN A

Ejercicio 1

Las variables de decisión son:

x número de furgonetas de tipo A $\qquad$ y número de furgonetas de tipo B.

Con los datos del problema se forma la siguiente tabla:

	J. Perros	J. Gatos	Coste
Furgoneta A (x)	4	3	240
Furgoneta B (y)	2	6	400
Necesidades	24	54	

El objetivo es minimizar el coste: $C(x, y) = 240x + 400y$

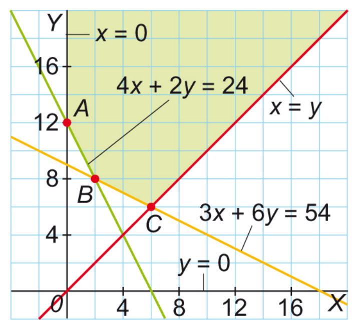
Sujeto a:

$y \geq x$

$4x + 2y \geq 24$

$3x + 6y \geq 54$

$x \geq 0$; $y \geq 0$



La región factible es la sombreada en la figura adjunta. Se obtiene representando las rectas asociadas a las inecuaciones.

Las coordenadas de los vértices se calculan resolviendo los sistemas que se indican a continuación:

A: $\begin{cases} x = 0 \\ 4x + 2y = 24 \end{cases} \Rightarrow A(0,\ 12)$; $\qquad$ B: $\begin{cases} 4x + 2y = 24 \\ 3x + 6y = 54 \end{cases} \Rightarrow B(2,\ 8)$; $\qquad$ C: $\begin{cases} y = x \\ 3x + 6y = 54 \end{cases} \Rightarrow C(6,\ 6)$.

Se trata de una región abierta. La solución óptima, el coste mínimo, si existe, se da en alguno de los vértices anteriores. (No obstante podría comprobarse trazando las rectas de nivel, como haremos después).

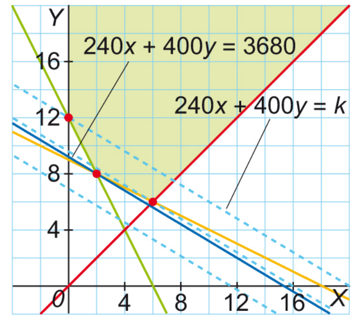
El coste de alquiler de furgonetas en cada uno de esos vértices es:

En A, $C(0,12) = 240 \cdot 0 + 400 \cdot 12 = 4800$ €.

En B, $C(2,8) = 240 \cdot 2 + 400 \cdot 8 = 3680$ €.

En C, $C(6,6) = 240 \cdot 6 + 400 \cdot 6 = 3840$ €.

El coste mínimo es de 3680 euros; se consigue alquilando 2 furgonetas del tipo *A* y 8 del tipo *B*.



Comprobación mediante las rectas de nivel.

Su ecuación es $240x+400y=k$.

Puede trazarse una de ellas y trasladarla a izquierda y derecha. El nivel mínimo se obtiene en el punto de la región factible más a la izquierda que esté en contacto con esas rectas de nivel.

Como puede observarse, ese punto es *B*(2, 8).

__Ejercicio 2__

a) $f(x)=ax^3+bx^2+2x+2 \Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+2$

Por tener un máximo relativo en $x=-1 \Rightarrow f'(-1)=0 \Rightarrow 3a-2b+2=0$.

Por ser $f(-1)=2 \Rightarrow -a+b-2+2=2$.

Se tiene el sistema:

$$\begin{cases} 3a-2b=-2 \\ -a+b=2 \end{cases} \xrightarrow[E_1 \to E_1+3E_2]{} \begin{cases} b=4 \\ -a+b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=4 \\ a=2 \end{cases}.$$

La función buscada es $f(x)=2x^3+4x^2+2x+2$.

b) $$\int_1^2 \left(7e^{3x}+\frac{4}{3}x^2-3\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)dx = \left[\frac{7}{3}e^{3x}+\frac{4}{9}x^3-2\sqrt{x^3}+\ln x\right]_1^2 =$$

$$= \left(\frac{7}{3}e^6+\frac{4}{9}8-2\sqrt{8}+\ln 2\right)-\left(\frac{7}{3}e^3+\frac{4}{9}-2\sqrt{1}+\ln 1\right) = \frac{7}{3}\left(e^6-e^3\right)+\frac{46}{9}-4\sqrt{2}+\ln 2.$$

La única primitiva que presenta una ligera dificultad es $\int\left(-3\sqrt{x}\right)dx$.

Puede hacerse como sigue:

$$\int\left(-3\sqrt{x}\right)dx=-3\int x^{\frac{1}{2}}dx=-3\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=-2x^{\frac{3}{2}}=-2\sqrt{x^3}.$$

Ejercicio 3

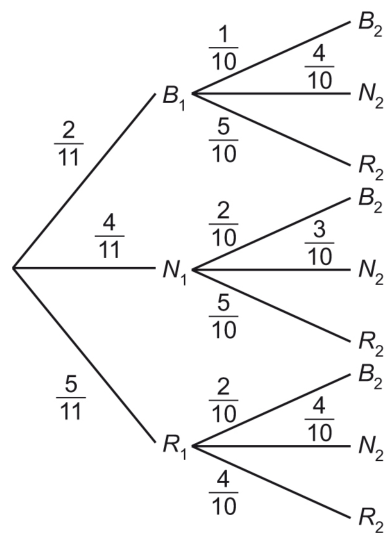
Se definen los sucesos:

B_i = “bola blanca en la extracción i-ésima”.

N_i = “bola negra en la extracción i-ésima”.

R_i = “bola roja en la extracción i-ésima”.

Si se extraen dos bolas al azar, sin reemplazamiento, las probabilidades de cada suceso se indican en el siguiente diagrama de árbol.



a) Por la probabilidad condicionada se tiene:

$$P(\text{las dos rojas}) = P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)P(R_2 / R_1) = \frac{5}{11}\cdot\frac{4}{10} = \frac{20}{110} = \frac{2}{11}.$$

b) El suceso “las bolas son de distinto color” es el contrario de que “las dos son del mismo color”.

$$P(\text{ser del mismo color}) = P(B_1 \cap B_2) + P(R_1 \cap R_2) + P(N_1 \cap N_2) =$$

$$= \frac{2}{11}\cdot\frac{1}{10} + \frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10} + \frac{5}{11}\cdot\frac{4}{10} = \frac{34}{110} = \frac{17}{55}.$$

Por tanto, $P(\text{ser de distinto color}) = 1 - P(\text{ser del mismo color}) = 1 - \frac{17}{55} = \frac{38}{55}$.

c) $P(R_2) = P(B_1 \cap R_2) + P(N_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap R_2) = \frac{2}{11}\cdot\frac{5}{10} + \frac{4}{11}\cdot\frac{5}{10} + \frac{5}{11}\cdot\frac{4}{10} = \frac{50}{110} = \frac{5}{11}$.

d) $P(A)=P(R_1)=\dfrac{5}{11}$.

$$P(B)=P(B_1\cap B_2)+P(R_1\cap R_2)+P(N_1\cap N_2)=\frac{17}{55}$$

Los sucesos *A* y *B* son independientes si se cumple que $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

El suceso $A \cap B$ es el suceso 1ª y 2ª roja; su probabilidad es $P(A\cap B)=P(R_1\cap R_2)=\dfrac{2}{11}$.

Como $P(A)P(B)=\dfrac{5}{11}\cdot\dfrac{34}{110}=\dfrac{17}{121}\neq P(A\cap B)$, se deduce que los sucesos *A* y *B* no son independientes