Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

Ejercicio 1

(3,25 puntos) Una empresa de carpintería tiene dos fábricas *A* y *B* en las que produce sillas, mesas y taburetes, y tiene que decidir el número de horas de trabajo en cada una de las dos fábricas para la semana próxima. Por cada hora de trabajo de la fábrica *A*, se producen 1 silla, 2 mesas y 4 taburetes, por cada hora de trabajo de la fábrica *B* se producen 4 sillas, 3 mesas y 2 taburetes. Durante la semana próxima la empresa tiene que producir, al menos, 80 sillas, 120 mesas y 96 taburetes. El coste por cada hora de trabajo de la fábrica *A* es de 1500 euros, mientras que el coste por cada hora de trabajo de la fábrica *B* es de 1000 euros. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar el número de horas que tiene que trabajar cada una de las fábricas para minimizar el coste. ¿Cuál es el valor de ese coste mínimo?

Ejercicio 2

(3,25 puntos) Dada la función:

$$f(x)=\frac{x^2-2x+1}{2x+3}$$

Calcular:

a) (0,25 puntos) Dominio de *f*.

b) (0,75 puntos) ¿Para qué valores de *x* es la función positiva?

c) (1 punto) Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

d) (1,25 puntos) Sus máximos y mínimos relativos, si existen.

Ejercicio 3

(3,5 puntos) Un concesionario se dedica a la venta de tres modelos de coches: *A*, *B* y *C*. En el concesionario trabajan dos vendedores: María y Pedro. El mes pasado María realizó el 55 % de las ventas y Pedro el 45 % restante. Además, de las ventas de María, un 60 % fueron del modelo *A*, un 30 % del modelo *B* y un 10 % del modelo *C*. De las ventas de Pedro, un 50 % fueron del modelo *A*, un 20 % del modelo *B* y un 30 % del modelo *C*.

a) **(0,75 puntos) Elegimos al azar una de las ventas realizadas el mes pasado. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un coche del modelo *B* vendido por María?**

b) **(1 punto) Elegimos al azar una de las ventas del mes pasado. ¿Cuál es la probabilidad de que sea del modelo *B*?**

c) **(1 punto) Elegimos al azar una de las ventas del modelo *B* del mes pasado. ¿Cuál es la probabilidad de que sea una venta de María?**

d) **(0,75 puntos) Elegimos al azar (con reemplazamiento) dos ventas del mes pasado. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas sea una venta de María?**

OPCIÓN B

Ejercicio 1

(3,25 puntos) Discutir, según los valores de *a*, el sistema:

$$\begin{cases} 2x + ay + az = 4 \\ -x + ay + z = a \\ x + y + az = 3 \end{cases}$$

Resolverlo para $a = -3$.

Ejercicio 2

Una empresa va a lanzar al mercado un nuevo juguete para la campaña de Navidad. Tiene que decidir el precio de venta al público del juguete, que estará entre 1 y 10 euros. Ha realizado un estudio y sabe que el beneficio *B* que obtendrá en la campaña dependerá del precio de venta que le ponga al juguete. Así, si le pone un precio de venta *x* (en euros), el beneficio que obtendrá será de $B(x) = \frac{9}{x} - \frac{8}{x^2} - 1$ donde *B* está expresado en millones de euros.

a) (0,75 puntos) ¿Para qué valores de $x \in [1,10]$ el beneficio es positivo?

b) (1,5 puntos) ¿Qué precio de venta $x \in [1,10]$ tiene que poner al juguete para maximizar el beneficio? ¿Cuál es el valor de ese beneficio máximo?

c) (1 punto) Calcular $\int_1^{10} B(x)dx$

Ejercicio 3

a) (1,5 puntos) Dados dos sucesos *A* y *B* tales que $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}8$ y $P(A \mid B) = 0{,}7$, calcular $P(A \cap B)$ y $P(A \cup B)$. ¿Son *A* y *B* sucesos independientes?

b) (2 puntos) Se sabe que el gasto semanal en ocio de los jóvenes de una ciudad tiene distribución normal de desviación típica 6 euros. Se toma una muestra de 10 jóvenes y se les pregunta el gasto en ocio de la última semana, con los siguientes resultados (expresados en euros):

24,5 11 16,5 18,5 21,5 25 6,5 12 10,5 9,5

Construya un intervalo de confianza de nivel 94 % para la media del gasto semanal en ocio de los jóvenes de la ciudad.

Nota: Se da la tabla Normal (0, 1).

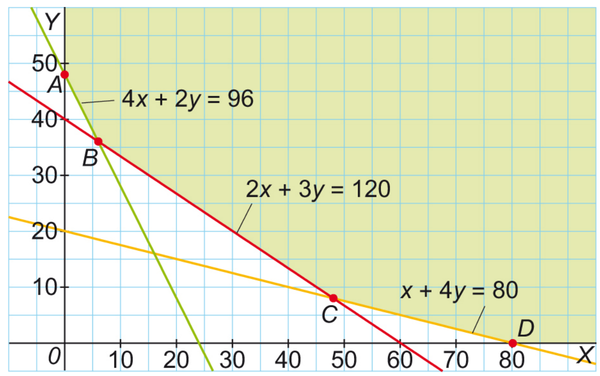
SOLUCIÓN DE LA OPCIÓN A

Ejercicio 1

Las variables de decisión son: *x* número de horas de la fábrica *A* *y* número de horas de la fábrica *B*

Se debe minimizar $z = 1500x+1000y$ sujeta a:

$$\begin{cases} x+4y \geq 80 & \text{restricción del número de sillas} \\ 2x+3y \geq 120 & \text{restricción del número de mesas} \\ 4x+2y \geq 96 & \text{restricción del número de taburetes} \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



La región factible es la sombreada en la figura adjunta.

Se obtiene representando las rectas asociadas a las inecuaciones.

Las coordenadas de los vértices se calculan resolviendo los sistemas que se indican a continuación:

A: $\begin{cases} x=0 \\ 4x+2y=96 \end{cases} \Rightarrow A(0,\ 48)$ B: $\begin{cases} 4x+2y=96 \\ 2x+3y=120 \end{cases} \Rightarrow B(6,\ 36)$;

C: $\begin{cases} x+4y=80 \\ 2x+3y=120 \end{cases} \Rightarrow C(48,\ 8)$ D: $\begin{cases} x+4y=80 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow D(80,\ 0)$.

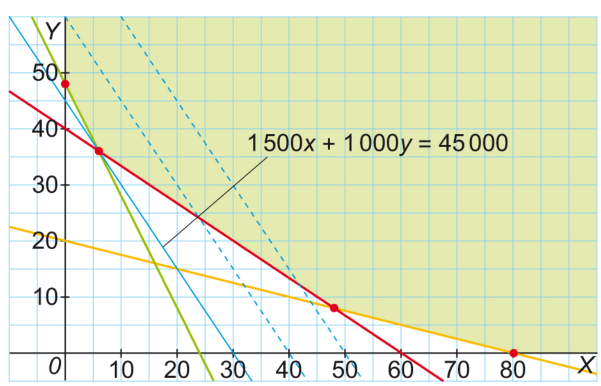
Se trata de una región abierta. La solución óptima, el coste mínimo, si existe, se da en alguno de los vértices anteriores. (No obstante podría comprobarse trazando las rectas de nivel, como haremos después).

El coste en cada uno de esos vértices es:

En A, $C(0,48) = 1500 \cdot 0 + 1000 \cdot 48 = 48000$ €. En B, $C(6,36) = 1500 \cdot 6 + 1000 \cdot 36 = 45000$ €.

En C, $C(48,8) = 1500 \cdot 48 + 1000 \cdot 8 = 80000$ €. En D, $C(80,0) = 1500 \cdot 80 + 1000 \cdot 0 = 120000$ €.

El coste mínimo es de 45 000 euros y se consigue trabajando 6 horas en la fábrica *A* y 36 horas en la fábrica *B*.



Comprobación mediante las rectas de nivel:

Su ecuación es $1500x + 1000y = k$.

Puede trazarse una de ellas y trasladarla a izquierda y derecha. El nivel mínimo se obtiene en el punto de la región factible más a la izquierda que esté en contacto con esas rectas de nivel.

Como puede observarse, ese punto es $B(6,\ 36)$.

Ejercicio 2

a) La función, $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{2x+3}$, no está definida cuando el denominador vale 0:

$$2x+3=0\Rightarrow x=-\frac{3}{2}$$

Por tanto, su dominio es: $D(f)=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$.

b) Como $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{2x+3}=\dfrac{(x-1)^2}{2x+3}$, el signo de la función depende solo del signo del denominador.

Será positiva cuando lo sea el denominador, es decir, para $x\in\left(-\dfrac{3}{2},+\infty\right)-\{1\}$.

En el punto $x = 1$ la función vale 0.

c) La función tienen una asíntota vertical en $x=-\dfrac{3}{2}$, pues:

$$\lim_{x\to-\frac{3}{2}^+}\frac{x^2-2x+1}{2x+3}=\left[\frac{\frac{25}{4}}{0^+}\right]=+\infty \qquad \lim_{x\to-\frac{3}{2}^-}\frac{x^2-2x+1}{2x+3}=\left[\frac{\frac{25}{4}}{0^-}\right]=-\infty.$$

También tiene una asíntota oblicua (el grado del numerador supera en 1 al del denominador).

Si la recta $y = mx + n$ es asíntota oblicua de la curva $f(x)$, entonces:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+1}{x(2x+3)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+1}{2x^2+3x}=\frac{1}{2}.$$

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{2x+3}-\frac{x}{2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{7}{2}x+1}{2x+3}=-\frac{7}{4}.$$

La asíntota oblicua es la recta $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{7}{4}$.

d) Derivando:

$$f(x)=\frac{x^2-2x+1}{2x+3}\Rightarrow f'(x)=\frac{(2x-2)(2x+3)-\left(x^2-2x+1\right)\cdot 2}{(2x+3)^2}=\frac{2x^2+6x-8}{(2x+3)^2}.$$

La derivada se anula si $\frac{2x^2+6x-8}{(2x+3)^2}=0$, es decir, en $x=-4$ y $x=1$ que son las soluciones de $2x^2+6x-8=0$.

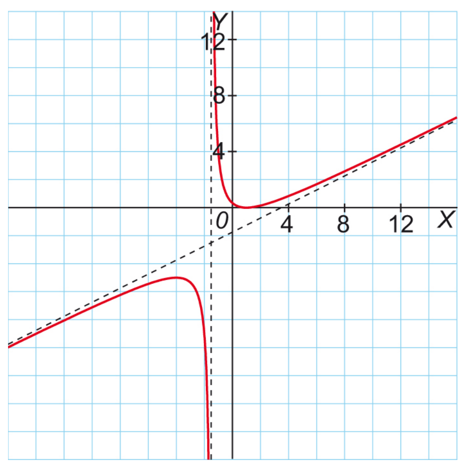
Derivando otra vez:

$$f''(x)=\frac{(4x+6)(2x+3)^2-\left(2x^2+6x-8\right)\cdot 2(2x+3)\cdot 2}{(2x+3)^4}\Rightarrow f''(x)=\frac{50}{(2x+3)^3}$$

Como $f'(-4)<0$, en $x=-4$ se tiene un máximo relativo; su valor es $f(-4)=-5$.

Como $f'(1)>0$, en $x=1$ la función tiene un mínimo relativo; su valor es $f(1)=0$.

Aunque no se pide, su gráfica es la siguiente:



Ejercicio 3

Se definen los sucesos:

M = "coche vendido por María" P = "coche vendido por Pedro";

A = "coche modelo A" B = "coche modelo B" C = "coche modelo C".

La información dada en el problema se puede resumir en la siguiente tabla.

	Ventas	*A*	*B*	*C*
María (*M*)	0,55	$0{,}60 \cdot 0{,}55 = 0{,}330$	$0{,}30 \cdot 0{,}55 = 0{,}165$	$0{,}10 \cdot 0{,}55 = 0{,}055$
Pedro (*P*)	0,45	$0{,}50 \cdot 0{,}45 = 0{,}225$	$0{,}20 \cdot 0{,}45 = 0{,}090$	$0{,}30 \cdot 0{,}45 = 0{,}135$
Totales	1	0,555	0,255	0,190

Las tres primeras preguntas pueden contestarse leyendo directamente en la tabla.

a) $P(M \cap B) = 0{,}165$.

b) $P(B) = P(M \cap B) + P(P \cap B) = 0{,}165 + 0{,}090 = 0{,}255$.

c) $P(M \mid B) = \dfrac{P(M \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}165}{0{,}255} \approx 0{,}647$.

d) Si se hacen dos ventas de coches, la probabilidad de que al menos una de ellas sea una venta de María es la contraria de que las dos hayan sido realizadas por Pedro:

P(al menos una de María) = 1 – P(las dos de Pedro) = 1 – 0,45 · 0,45 = 0,7975.