Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

Ejercicio 1

Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + mz = m \\ mx + (m-1)y + z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

a) **(1 punto) Determine los valores del parámetro m para los que ese sistema de ecuaciones es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.**

b) **(1 punto) Encuentre las soluciones de ese sistema cuando $m = 1$.**

c) **(1 punto) Considere las matrices:**

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Determine el rango de la matriz producto *CD*.

Ejercicio 2

(1,5 puntos) Determine la ecuación del plano que pasa por el punto (0, 0, 0) y contiene a la recta:

$$r: \begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ 3y - 2z + 4 = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 3

a) **Considere la función:**

$$f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

a.1.) (1 punto) Determine el dominio y las asíntotas de la función $f(x)$.

a.2.) (1 punto) Determine los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$.

a.3.) (1 punto) Determine la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $x=2$.

b) **(1 punto) Calcule:**

$$\int \frac{x^2-3x+3}{x-1}dx$$

Ejercicio 4

Al 80 % de los alumnos de una clase les gusta el fútbol; al 40 % les gusta el balonmano y al 30 % les gustan ambos deportes.

a) **(0,75 puntos) Si se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le guste alguno de los dos deportes (uno o los dos)?**

b) **(0,75 puntos) Se eligen 10 alumnos al azar con reemplazamiento, es decir, cada vez que se elige un alumno se le pregunta por sus gustos y se repone a la clase, pudiendo ser elegido nuevamente. Calcule la probabilidad de que solo a 3 les guste el fútbol (NO es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen y sin hacer los cálculos).**

OPCIÓN B

Ejercicio 1

Considere la matriz:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

a) **(1,5 puntos) Determine los valores del parámetro k para los que la matriz $A-kI$ tenga inversa, siendo I la matriz identidad de orden 3.**

b) **(1,5 puntos) Encuentre la matriz X que verifica que $(A-3I)X=2I$, siendo I la matriz identidad de orden 3 y A la matriz que aparece al comienzo del enunciado.**

Ejercicio 2

Considere el plano: π: $2ax + y + az = 4$; y la recta: $r: \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ -x + y + 2z = 3 \end{cases}$

a) (0,75puntos) Determine la posición del plano y la recta según los diferentes valores de *a*.

b) (0,75 puntos) Para $a = 2$, determine la recta que es perpendicular al plano π y pasa por el punto $P(0, 1, 0)$.

Ejercicio 3

a) (2 puntos) Determine los valores de los parámetros a, b y c para que la función:

$$f(x) = a(x-1)^3 + bx + c$$

a.1.) Pase por el punto (1, 1).

a.2.) En el punto (1, 1) su tangente tenga de pendiente 2.

a.3.) En el punto $x = 2$ tenga un máximo relativo.

b) (2 puntos) Determine el valor del límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x}\right)^{\frac{3x^2-1}{x}}$$

Ejercicio 4

En una empresa los trabajadores se clasifican en tres categorías: *A*, *B* y *C*. El 30 % de los trabajadores pertenecen a la categoría *A*; el 25 % a la categoría *B* y el resto a la categoría *C*.

Además, se sabe que de los trabajadores de la categoría *A* un 5 % habla inglés; mientras que de la categoría *B* un 20 % habla inglés y de los trabajadores de la categoría *C* un 60 % habla inglés.

a) (0,75 puntos) Si se elige al azar un trabajador de la empresa, ¿Cuál es la probabilidad de que hable inglés?

b) (0,75 puntos) Si se elige al azar un trabajador de la empresa y resulta que SI habla inglés, ¿Cuál es la probabilidad de que pertenezca a la categoría *C*?

SOLUCIÓN DE LA OPCIÓN A

Ejercicio 1

a) Las matrices del sistema son $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & m \\ m & m-1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ m & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Igualamos a cero el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ m & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = m-1+1+m^2-m(m-1)-m-1 = m-1 = 0 \Rightarrow m = 1.$$

Luego para todo valor de m distinto de 1 el determinante será distinto de cero, y por lo tanto el rango de la matriz será 3. Será un sistema compatible determinado.

Si $m = 1$: $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Al tener la matriz ampliada dos filas iguales, y ser el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$,

$\text{rg}(A) = 2 = \text{rg}(A')$ < nº de incógnitas. Será un sistema compatible indeterminado.

b) Para $m = 1$,

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+z=2 \\ x+y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ x+z=2 \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=1-\lambda \\ x=2-\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1-\lambda-2+\lambda=-1 \\ x=2-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

Por lo tanto, la solución del sistema será $\begin{cases} x=2-\lambda \\ y=-1 \\ z=\lambda \end{cases}$.

c) $CD = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Al tener una fila nula y la primera y la segunda proporcionales ($F_1 = -F_2$), entonces $\text{rg}(CD) = 1$.

Ejercicio 2

Podemos calcular la ecuación del plano a través de un punto del plano y dos vectores del plano linealmente independientes.

El punto del plano será el punto $O(0, 0, 0)$ y los dos vectores, uno el vector director de la recta $\vec{v}_r$ y otro el vector que va de O a P_r.

$$\text{Si } r:\begin{cases}2x-y-2=0\\3y-2z+4=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=0\\y=-2\\3y-2z+4=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=0\\y=-2\\z=-1\end{cases} \Rightarrow P_r(0,-2,-1).$$

Como $\vec{n}_1=(2,-1,0)$ y $\vec{n}_2=(0,3,-2)$ son los vectores perpendiculares a los planos que definen la recta, entonces un vector director de la recta es:

$$\vec{v}_r=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\2 & -1 & 0\\0 & 3 & -2\end{vmatrix}=(2,4,6)=(1,2,3)$$

Por otro lado, $\overrightarrow{OP_r}=(0,-2,-1)$.

Calculamos la ecuación implícita del plano:

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & x-0\\2 & -2 & y-0\\3 & -1 & z-0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & x\\2 & -2 & y\\3 & -1 & z\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \pi: -2x+6x+y-2z=0 \Rightarrow \pi: 4x+y-2z=0.$$

Ejercicio 3

a)

a.1) Asíntotas verticales:

$x^2+1=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-1} \Rightarrow$ No tiene solución, por lo que $D(f)=\mathbb{R}$.

Además no tendrá asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1$$

Tiene como asíntota horizontal $y=1$ cuando $x\to+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+1}{\sqrt{(-x)^2+1}}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-x}{x}+\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-1$$

Tiene como asíntota horizontal $y=-1$ cuando $x\to-\infty$

No tiene asíntotas oblicuas al ser incompatibles con las horizontales.

a.2) Calculamos la derivada primera de $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$:

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}(x+1)}{x^2+1}=\frac{\frac{x^2+1-x(x+1)}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{\frac{1-x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{1-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

Igualamos a cero para hallar los extremos relativos:

$$f'(x)=0\Rightarrow 1-x=0\Rightarrow x=1,\ f(1)=\frac{2}{8\sqrt{2}}$$

Estudiamos el crecimiento y el decrecimiento de la función para ver si se trata de máximo o mínimo:

$$f'(2)=\frac{1-2}{(2^2+1)\sqrt{2^2+1}}<0$$

$$f'(-2)=\frac{1-(-2)}{((-2)^2+1)\sqrt{(-2)^2+1}}>0$$

	$-\infty$ 1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	↗	↘

Luego el punto $\left(1,\sqrt{2}\right)$ es un máximo relativo.

a.3) La recta será $y - y_0 = m(x - x_0)$:

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow f(2) = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \Rightarrow (x_0, y_0) = \left(2, \frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$m = f'(2) = \frac{1-2}{\left(2^2+1\right)\sqrt{2^2+1}} = \frac{-1}{5\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{25}$$

Luego $y - \frac{3\sqrt{5}}{5} = -\frac{\sqrt{5}}{25}(x-2)$.

b) Descomponemos la fracción realizando la división por el método tradicional de manera que:

$$\frac{x^2-3x+3}{x-1} = x - 2 + \frac{1}{x-2}$$

$$\int \frac{x^2-3x+3}{x-1}dx = \int \left(x - 2 + \frac{1}{x-1}\right)dx = \int xdx - 2\int dx + \int \frac{1}{x-1}dx = \frac{x^2}{2} - 2x + \ln(x-1) + C$$

Ejercicio 4

a) Definimos los sucesos F = "le gusta el fútbol" y B = "le gusta el balonmano".

Conocemos $P(F) = 0{,}8$, $P(B) = 0{,}4$ y $P(F \cap B) = 0{,}3$

La probabilidad de que a un alumno al azar le guste alguno de los dos deportes será la probabilidad de la unión de ambos sucesos:

$$P(F \cup B) = P(F) + P(B) - P(F \cap B) = 0{,}8 + 0{,}4 - 0{,}3 = 0{,}9$$

b) Realizamos 10 veces el experimento en el que tenemos una probabilidad de éxito de $P(B) = 0{,}8$ y de fracaso $1 - P(B) = 0{,}2$. Llamando p y q respectivamente a ambas probabilidades, podemos utilizar la distribución binomial de parámetros $n = 10$ y $p = 0{,}8 \Rightarrow B(n = 10, p = 0{,}8)$

La probabilidad de que sólo haya 3 alumnos a los que les guste el fútbol será:

$$P(X=3) = \binom{10}{3} \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^{10-3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^7 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^7 .$$