Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

Ejercicio 1 (3 puntos)

a) (2 puntos) Clasifique el siguiente sistema de ecuaciones, según los diferentes valores de la constante real λ :

$$\begin{cases} x+y=1 \\ \lambda x+z=0 \\ x+(1+\lambda)y+\lambda z=\lambda+1 \end{cases}$$

b) (1 punto) Halle la solución, si existe, cuando $\lambda=1$.

Ejercicio 2 (2 puntos)

a) (1 punto) Determine la posición relativa de las dos rectas siguientes:

$$r:\begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=t \end{cases} \qquad s:\begin{cases} 2x-y=0 \\ 3y-2z=0 \end{cases}$$

b) (1 punto) Determine la distancia del punto $P(0,0,0)$ a cada una de las dos rectas anteriores.

Ejercicio 3 (4 puntos)

a) (3 puntos) Considere la función de variable real x siguiente: $f(x)=x(\ln(x))^2$

a.1) (0,5 puntos) Determine el dominio de la función $f(x)$.

a.2) (1,5 puntos) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de esa función.

a.3) (1 punto) Determine, si existen, los máximos y mínimos relativos y, en ese caso, calcule el valor de la función $f(x)$ en cada uno de ellos.

b) (1 punto) Determine el valor de la constante k para que se verifique que:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+kx-7}-\sqrt{x^2-2x+5}=\frac{5}{3}$$

Ejercicio 4 (1 punto)

En una clase de bachillerato hay 10 chicas y 8 chicos. De ellos 3 chicas y 4 chicos juegan al ajedrez. Si escogemos un estudiante al azar, determine las siguientes probabilidades:

a) (0,5 puntos) Sea chica y no juegue al ajedrez.

b) (0,5 puntos) No juegue al ajedrez sabiendo que es chico.

OPCIÓN B

Ejercicio 1 (3 puntos)

a) (2 puntos) Sea A una matriz de dimensión 3x3 y denotamos por $|A|$ el determinante de la matriz.

a.1) (1 punto) Considere la matriz $B = \frac{1}{2}A$. Si $|B| = 1$, calcule el determinante de A, es decir: $|A|$.

a.2) (1 punto) Si $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x-1 & 2 & 0 \\ 2 & x-1 & 2 \end{pmatrix}$. Determine los valores de x para los que se cumple que $|B| = 1$, siendo $B = \frac{1}{2}A$.

b) (1 punto) Determine las matrices cuadradas de dimensión 2 x 2 de la forma $M = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$ que verifiquen que $M\,M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, donde M' representa la matriz traspuesta de M.

Ejercicio 2 (2 puntos)

a) (1 punto) Sea "m" una constante real. Determine la posición relativa de los planos siguientes, según los valores de "m":

$$\pi : mx - 6y + 2z = 2 \qquad \pi' : \begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2 - 2\lambda + \mu \end{cases}$$

b) (1 punto) Determine el ángulo que forman las rectas:

$$r : \begin{cases} x + z = 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} 2x - 4y - 2z = 0 \\ x + y + 3z = -1 \end{cases}$$

Ejercicio 3 (4 puntos)

a) (2 puntos) Encuentre dos números tales que el doble del primero más el triple del segundo sea 24 y su producto sea máximo.

b) (2 puntos) Determine: $\lim_{x \to 0} \left(\frac{x+1}{1+\operatorname{sen}(x)} \right)^{\frac{1}{x^2}}$

Ejercicio 4 (1 punto)

En una urna hay 10 bolas blancas y 3 negras. Se extrae una bola al azar y, sin verla ni reemplazarla, se extrae una segunda bola.

a) (0,5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola extraída sea negra?

b) (0,5 puntos) Sabiendo que la segunda bola ha sido negra, calcule la probabilidad de que la primera bola extraída fuera negra también.

SOLUCIÓN DE LA OPCIÓN B

Ejercicio 1

a.1) $B=\frac{1}{2}A\Rightarrow A=2B\Rightarrow |A|=|2B|=2^3|B|=8$

Hemos utilizado que cuando los elementos de una fila o columna de una matriz se multiplican por un número, el determinante de la matriz queda multiplicado por ese número.

a.2) $B=\frac{1}{2}A\Rightarrow |B|=\left|\frac{1}{2}A\right|=\frac{1}{8}\begin{vmatrix} x & 1 & 1\\ x-1 & 2 & 0\\ 2 & x-1 & 2\end{vmatrix}=\frac{1}{8}\left[4x+(x-1)^2-4-2(x-1)\right]=\frac{1}{8}(x^2-1)$

Por tanto, $|B|=1\Rightarrow \frac{1}{8}(x^2-1)=1\Rightarrow x^2-1=8\Rightarrow x^2-9=0\Rightarrow x=\pm 3$

b) $MM'=\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}\Rightarrow \begin{pmatrix}1&x\\0&y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\x&y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}\Rightarrow \begin{pmatrix}1+x^2&xy\\xy&y^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}\Rightarrow \begin{cases}1+x^2=1\\ xy=0\\ y^2=4\end{cases}\Rightarrow x=0,\ y=\pm 2$

Por tanto, las matrices que lo cumplen serán $M=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$ y $M=\begin{pmatrix}1&0\\0&-2\end{pmatrix}$

Ejercicio 2

a) Hallamos la ecuación implícita del segundo plano:

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z-2\\ 1 & -1 & -2\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow -x-3(y-1)+(z-2)=0\Rightarrow \pi':-x-3y+z=-1$$

Consideremos las matrices asociadas al sistema formado por las ecuaciones de los planos

$$M=\begin{pmatrix}m&-6&2\\-1&-3&1\end{pmatrix}\qquad M'=\begin{pmatrix}m&-6&2&2\\-1&-3&1&-1\end{pmatrix}$$

Observemos que $\text{rg}(M)=1$ si $m=-2$, ya que las filas de M son proporcionales en este caso, y que $\text{rg}(M)=2$ si $m\neq -2$. En cambio, $\text{rg}(M')=2$ para cualquier valor de m, ya que el menor de orden 2 $\begin{vmatrix}2&2\\1&-1\end{vmatrix}=-4\neq 0$.

Por tanto, los planos son paralelos si $m=-2$ y secantes si $m\neq -2$.

b) Si α es el ángulo que forman las rectas r y s, tenemos $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s|}{|\vec{v}_r||\vec{v}_s|}$, siendo $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ vectores directores de r y s respectivamente.

Tenemos

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} + \vec{k} = (-1, 0, 1) \qquad \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-10, -8, 6) \propto (5, 4, -3)$$

con lo que $\cos\alpha = \dfrac{8}{\sqrt{2}\sqrt{50}} = \dfrac{8}{10} = 0{,}8 \Rightarrow \alpha = 36{,}87^{\circ}$.

Ejercicio 3

a) Sean x e y los números buscados, queremos maximizar $F(x) = x \cdot y$ sabiendo que

$$2x + 3y = 24 \Rightarrow y = \frac{24 - 2x}{3} = 8 - \frac{2x}{3}$$

Por tanto, queremos maximizar la función $F(x) = x\left(8 - \dfrac{2x}{3}\right) = 8x - \dfrac{2}{3}x^2$ en el intervalo $(-\infty, +\infty)$.

Tenemos

$$F'(x) = 8 - \frac{4}{3}x = 0 \Rightarrow x = 6$$

Como $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = -\infty$ y $F(6) = 24$, el máximo absoluto de F se alcanza en $x = 6$, es decir, los números buscados son $x = 6$ e $y = 4$.

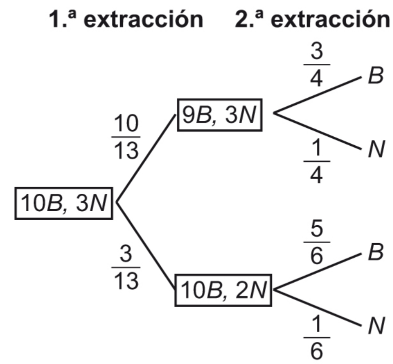
b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+1}{1+\operatorname{sen}(x)}\right)^{\frac{1}{x^2}} = 1^{\infty}$ (indet.) $= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{x+1}{1+\operatorname{sen}(x)}-1\right)} \underset{(*)}{=} e^0 = 1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{x+1}{1+\operatorname{sen}(x)}-1\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{x+1-1-\operatorname{sen}(x)}{1+\operatorname{sen}(x)}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen}(x)}{x^2+x^2\operatorname{sen}(x)} = \frac{0}{0} \text{ (indet.)} = \text{(L'Hôpital)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{2x+2x\operatorname{sen}(x)+x^2\cos(x)} = \frac{0}{0} \text{ (indet.)} = \text{(L'Hôpital)}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{2+2\operatorname{sen}(x)+2x\cos(x)+2x\cos(x)-x^2\operatorname{sen}(x)} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{2+2\operatorname{sen}(x)+4x\cos(x)-x^2\operatorname{sen}(x)} = \frac{0}{2} = 0$$

<u>Ejercicio 4</u>



Consideremos los sucesos siguientes

B_1 = “La primera bola extraída es blanca”

B_2 = “La segunda bola extraída es blanca”

N_1 = “La primera bola extraída es negra”

N_2 = “La segunda bola extraída es negra”

a) Usaremos el teorema de la probabilidad total:

$$P(N_2) = P(B_1)\cdot P(N_2 \mid B_1) + P(N_1)\cdot P(N_2 \mid N_1) = \frac{10}{13}\cdot\frac{1}{4} + \frac{3}{13}\cdot\frac{1}{6} = \frac{3}{13} \approx 0{,}231$$

b) Usaremos el teorema de Bayes:

$$P(N_1 \mid N_2) = \frac{P(N_2 \mid N_1)P(N_1)}{P(N_2)} = \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{13}}{\frac{3}{13}} = \frac{1}{6} \approx 0{,}167$$