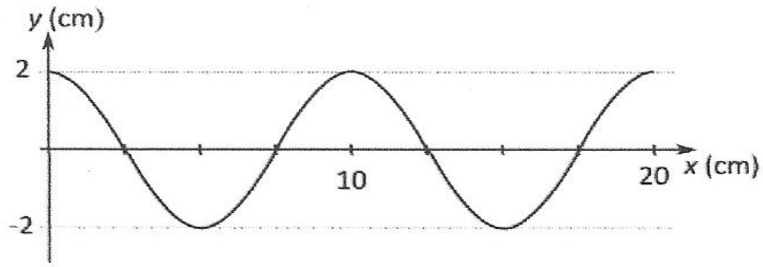
OPCIÓN A

1. Por una cuerda tensa se propaga, en el sentido positivo del eje X, una onda armónica transversal. Los puntos de la cuerda oscilan con una frecuencia f = 4 Hz. En la gráfica se representa la posición de los puntos de la cuerda en el instante t = 0.

a) Determine la longitud de onda y la velocidad de propagación de la onda. *(1 punto)*

b) Escriba la función de onda correspondiente, en unidades SI. *(1 punto)*

c) Calcule la máxima velocidad de oscilación trasversal de los puntos de la cuerda. *(0,5 puntos)*



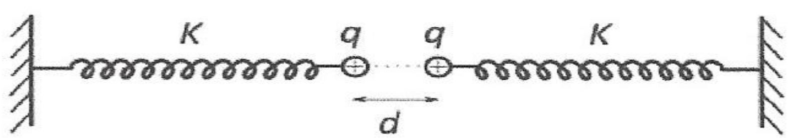
2. a) Momento angular de una partícula respecto de un punto: definición; teorema de conservación. *(1 punto)*

b) La órbita de Plutón en torno al Sol es elíptica. La relación de distancia entre su afelio y su perihelio es 5/3. Calcule la relación (cociente) entre los valores en el afelio y en el perihelio de las siguientes magnitudes de Plutón: momento angular respecto al centro del Sol, energía cinética y energía potencial gravitatoria. *(1,5 puntos)*

3. a) Escriba y comente la Ley de Coulomb. ¿Qué relación existe entra fuerza electrostática y el campo electrostático? *(1,5 puntos)*

b) Disponemos de un sistema para medir la carga eléctrica compuesto por dos muelles de constante elástica k = 10 N/m que tienen en sus extremos unas pequeñas esferas. Cuando las esferas están descargadas se encuentran en contacto y los muelles en su longitud natural. Cuando cargamos las esferas con la misma carga, se separan una distancia de 10 cm. Calcule la carga de las esferas. *(1 punto)*

Datos: $1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ N m^2 C^{-2}.



4. a) Explique en qué consiste el efecto fotoeléctrico. ¿Qué es la frecuencia umbral? *(1 punto)*

b) La energía de extracción de electrones (función de trabajo) del oro es 5,1 eV. Calcule la frecuencia umbral para el efecto fotoeléctrico de este metal. Calcule el potencial de frenado de los electrones arrancados cuando se ilumina una muestra de oro con luz de 230 nm de longitud de onda. *(1,5 puntos)*

Datos: Constante de Planck, $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J s; velocidad de la luz en el vacío, $c = 3 \cdot 10^8$ m s^{-1}; carga del electrón $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C; 1 eV = $1{,}60 \cdot 10^{-19}$ J; 1 nm = 10^{-9} m.

OPCION B

1. Una partícula describe un movimiento armónico simple a lo largo del eje X, de amplitud $A = 2$ m, frecuencia angular $\omega = 2\pi$ rad s^{-1} y fase inicial nula.

a) Determine la posición y la velocidad de la partícula en función del tiempo. *(1 punto)*

b) Calcule la energía cinética y la energía potencial de la partícula en función del tiempo. Represente la energía cinética para dos periodos de oscilación completos. *(1,5 puntos)*

Datos: Masa de la partícula: 100 g.

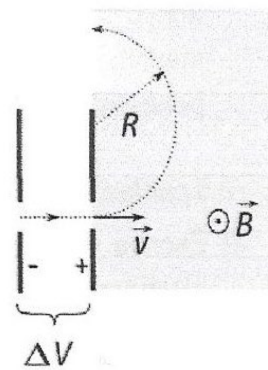
2. a) Enuncie y explique la ley de gravitación universal. *(1 punto)*

La nave Apolo 11 permitió la llegada del hombre a la Luna en 1969. Para ello orbitó alrededor de ella con un periodo de 119 minutos y a una distancia media del centro de la Luna de 1850 km. Suponiendo que su órbita fue circular, determine:

b) La velocidad orbital del Apolo 11. *(0,5 puntos)*
c) La masa de la Luna. *(1 punto)*

Datos: Constante de gravitación universal, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$N m^2 kg^{-2}.

3. a) Escribe la expresión de la Fuerza de Lorentz que actúa sobre una partícula de carga q que se mueve con velocidad **v** en una región donde hay un campo magnético **B**. Explica las características de esta fuerza y qué circunstancias deben cumplirse para que la partícula describa una trayectoria circular. *(1,5 puntos)*



b) Un electrón de velocidad inicial nula es acelerado mediante un campo eléctrico entre dos placas entre las que existe una diferencia de potencial $\Delta V = 500$ V. Después penetra en una región donde existe un campo magnético perpendicular a ***v*** y de intensidad $B = 10^{-3}$ T. Calcula la velocidad v que tiene el electrón al pasar por la segunda placa y el radio R de la trayectoria que describe en la región de campo **B**. *(1 punto)*

Datos: Carga del electrón: $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; masa del electrón $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

4. a) Enuncie y explique las leyes de la reflexión y de la refracción de la luz. *(1 punto)*

Una lámina de aceite (índice de refracción $n = 1{,}47$) de caras planas y paralelas y espesor d se encuentra entre el aire y el agua. Un rayo de luz monocromática de frecuencia $f = 5 \cdot 10^{14}$ Hz incide desde el agua en la lámina.

b) Determine las longitudes de onda del rayo en el agua y en el aceite. *(0,5 puntos)*

c) Calcule el ángulo de incidencia en la superficie de separación agua-aceite a partir del cual se produce reflexión total interna en la superficie de separación aceite-aire. *(1 punto)*

Datos: Índice de refracción del agua, $n_{agua} = 1{,}33$; índice de refracción del aire, $n_{aire} = 1$; velocidad de la luz en el vacío, $c = 3 \cdot 10^8$ m·s^{-1}.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. a) y b) Las magnitudes características de una onda armónica $y(x,t) = A\cos(\omega t \mp kx + \delta)$ son: la amplitud A, el período $T = 2\pi / \omega$, la frecuencia $f = 1/T$, la longitud de onda $\lambda = 2\pi / k$, la fase inicial δ del punto situado en el origen y la velocidad de propagación $v = \omega / k$ en el sentido $\pm\vec{e}_x$.

En nuestro caso, $f = 4\,\text{Hz}$ y, a partir de la gráfica deducimos que la amplitud (máximo desplazamiento transversal) es $A = 2\,\text{cm}$ y la longitud de onda (distancia entre, por ejemplo, dos máximos) es $\lambda = 10\,\text{cm}$. Por tanto, $T = 1/f = 1/4\,\text{s} = 2\pi/\omega \to \omega = 8\pi\,\text{s}^{-1}$, $k = 2\pi/\lambda = 2\pi/0{,}1 = 20\pi\,\text{m}^{-1}$ y la velocidad de propagación de la onda es $v = \omega/k = 8\pi/20\pi = 2/5\,\text{m/s}$ en el sentido $\vec{e}_x$. Por tanto elegimos el signo "–" correspondiente a una propagación en sentido positivo del eje del eje *X*. La ecuación de la onda es:

$$y(x,t) = 0{,}02\cos(8\pi t - 20\pi x + \delta)\ \text{m}$$

La fase inicial en el origen δ se obtiene pidiendo (ver gráfica del enunciado) que $y(0,0) = 2\,\text{cm}$:

$$y(0,0) = 0{,}02 = 0{,}02\cos\delta \longrightarrow 0 = \cos\delta \longrightarrow \delta = 0\ \text{rad}$$

Finalmente:

$$y(x,t) = 0{,}02\,cos(8\pi t - 20\pi x)\ \text{m}.$$

c) La velocidad transversal del punto que vibra en la posición "*x*" es, por definición:

$$v(x,t) = \frac{\text{d}y(x,t)}{\text{d}t} = \frac{\text{d}}{\text{d}t}\big(0{,}02\cos(8\pi t - 20\pi x)\big) = -0{,}16\pi\,\text{sen}(8\pi t - 20\pi x)\ \text{m/s}$$

Dado que el valor absoluto máximo de $\text{sen}(8\pi t - 20\pi x)$ es 1, el valor máximo de la velocidad de vibración de los puntos de la onda es $v_{\text{máx.}} = 0{,}16\pi\,\text{m/s}$.

2. a) El momento angular de una partícula se define como $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$, donde $\vec{r}$ y $\vec{v}$ son los vectores de posición y velocidad de la partícula y m es su masa. Derivando con respecto al tiempo:

$$\frac{\text{d}\vec{L}}{\text{d}t} = \frac{\text{d}}{\text{d}t}(m\vec{r} \times \vec{v}) = m\frac{\text{d}\vec{r}}{\text{d}t} \times \vec{v} + m\vec{r} \times \frac{\text{d}\vec{v}}{\text{d}t} = m\vec{v} \times \vec{v} + m\vec{r} \times \vec{a} = \vec{0} + \vec{r} \times (m\vec{a}) = \vec{r} \times \vec{F}_{\text{Total}}$$

donde hemos tenido en cuenta las definiciones de velocidad, $\vec{v} = \frac{\text{d}\vec{r}}{\text{d}t}$, aceleración, $\vec{a} = \frac{\text{d}\vec{v}}{\text{d}t}$ y la segunda ley de Newton para la partícula, $m\vec{a} = \vec{F}_{\text{Total}}$.

Si la fuerza total, $\vec{F}_{\text{Total}}$, a la que se encuentra sometida la masa lleva en todo momento la dirección radial, es decir, la dirección de la recta que la une con el origen de coordenadas, los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}_{\text{Total}}$ serán paralelos y por tanto el producto vectorial $\vec{r} \times \vec{F}_{\text{Total}}$ nulo. Concluiremos que $\frac{\text{d}\vec{L}}{\text{d}t} = \vec{0}$, es decir, que el momento angular se conserva: $\vec{L}(t) = cte.$

La principal consecuencia de esta conservación es que el movimiento de la partícula se encuentra contenido en un plano que pasa por el origen de coordenadas. Si, además, el módulo de $\vec{F}_{\text{Total}}$ depende exclusivamente de la distancia al origen, la conservación del momento angular implica también la constancia de la velocidad areolar, es decir, que el vector de posición barre áreas iguales en tiempos iguales.

Cuando una fuerza es radial y su módulo depende sólo de la distancia al centro se dice que esa fuerza es "central". El ejemplo más importante de fuerza central es la gravitatoria. Tomando como origen de coordenadas la posición del Sol, cada planeta del Sistema Solar experimenta, según la ley de la Gravitación Universal de Newton, una fuerza central atractiva, siendo el Sol el centro de fuerzas (despreciamos los efectos de otros cuerpos celestes). La conservación del momento angular aplicada a cada planeta explica entonces su movimiento plano y la constancia de su velocidad areolar.

b) Plutón experimenta la fuerza central ejercida por el Sol. Aplicamos la conservación del momento angular de Plutón para obtener la relación entre los módulos de su velocidad en el perihelio v_{p} y el afelio v_{a} y las respectivas distancias al Sol r_{p} y r_{a}. Para ello tenemos en cuenta que el ángulo formado por $\vec{r}$ y $\vec{v}$ en ambos puntos extremos es 90^{o} (m es la masa del planeta):

$$\vec{L}(\vec{r}_{\text{a}}) = \vec{L}(\vec{r}_{\text{p}}) \xrightarrow{|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\operatorname{sen}\alpha} mr_{\text{a}}v_{\text{a}} = mr_{\text{p}}v_{\text{p}} \longrightarrow r_{\text{a}}v_{\text{a}} = r_{\text{p}}v_{\text{p}}\,.$$

Al ser $\dfrac{r_{\text{a}}}{r_{\text{p}}} = \dfrac{5}{3}$, la relación entre las velocidades en el afelio y el perihelio es:

$$r_{\text{a}}v_{\text{a}} = r_{\text{p}}v_{\text{p}} \longrightarrow \frac{v_{\text{a}}}{v_{\text{p}}} = \frac{r_{\text{p}}}{r_{\text{a}}} = \frac{3}{5}$$

A partir de aquí obtenemos la relación entre las energías cinéticas y potencial gravitatoria en el afelio y el perihelio (*M* es la masa del Sol):

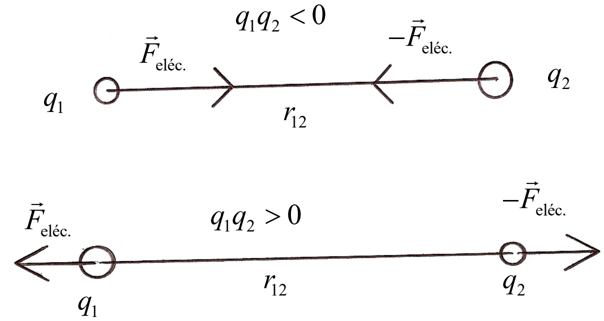
$$\frac{E_{\text{c,a}}}{E_{\text{c,p}}} = \frac{mv_{\text{a}}^2/2}{mv_{\text{p}}^2/2} = \left(\frac{v_{\text{a}}}{v_{\text{p}}}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \qquad \frac{E_{\text{p,a}}}{E_{\text{p,p}}} = \frac{-GMm/r_{\text{a}}}{-GMm/r_{\text{p}}} = \frac{r_{\text{p}}}{r_{\text{a}}} = \frac{3}{5}$$

Como ya hemos indicado, el momento angular de Plutón se conserva. Por tanto, la relación entre los módulos del momento angular en cualesquiera dos puntos de la trayectoria de Plutón es 1:

$$\frac{|\vec{L}(\vec{r}_{\text{a}})|}{|\vec{L}(\vec{r}_{\text{p}})|} = 1$$

3. a) La carga es una característica elemental de la materia en virtud de la cual que ésta se atrae o se repele. La diferencia entre atracción y repulsión queda explicada en base a la existencia de dos tipos de cargas, las positivas y las negativas, de la siguiente manera: dos cargas de igual signo se repelen y dos de signos opuestos se atraen. La dirección e intensidad de la fuerza eléctrica queda expresada en la ley de Coulomb: "Dos cargas q_1 y q_2 se atraen (diferente signo, $q_1q_2<0$) ó repelen (mismo signo, $q_1q_2>0$) electrostáticamente con una fuerza cuya dirección es la de la recta que las une y cuyo módulo es directamente proporcional al producto de sus cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa (r_{12}):

$$\left|\vec{F}_{\text{eléctrica}}\right| = K\frac{|q_1q_2|}{r_{12}^2}$$



El valor de la constante de proporcionalidad en el Sistema Internacional es $K=9\cdot10^9\ \text{Nm}^2/\text{C}^2$".

El campo eléctrico $\vec{E}$ creado en un punto P por una carga q se define como la fuerza eléctrica ejercida por q sobre la unidad de carga colocada en dicho punto. De la ley de Coulomb deducimos que el módulo del campo eléctrico es $E(P)=\dfrac{K|q|}{r^2}$, donde r es la distancia de la carga al punto P y $K=9\cdot10^9\ \text{Nm}^2/\text{C}^2$. La dirección del campo es la de la recta que une la carga con P y el sentido es repulsivo si $q>0$ y atractivo si $q<0$. Por el principio de superposición, el campo de varias cargas en P es la suma vectorial de los campos producidos por cada una en dicho punto.

b) Cuando cada una de las dos cargas q se encuentra en equilibrio, la fuerza del muelle, (cuyo módulo es $F_{\text{muelle}}=k\cdot\Delta x$) y la fuerza eléctrica se compensan:

$$\xleftarrow{\vec{F}_{\text{eléctrica}}} q \xrightarrow{\vec{F}_{\text{muelle}}} \overbrace{\qquad}^{d} \xleftarrow{\vec{F}_{\text{muelle}}} q \xrightarrow{\vec{F}_{\text{eléctrica}}}$$

Conocidas $k=10\,\text{N/m}$ y la elongación de cada muelle $e=d/2=5\,\text{cm}$ podemos calcular carga q:

$$\left|\vec{F}_{\text{muelle}}\right| = \left|\vec{F}_{\text{eléctrica}}\right| \longrightarrow k\cdot e=\frac{Kq^2}{d^2}\xrightarrow{e=d/2} q=\pm\sqrt{\frac{kd^3}{2K}}=\pm\sqrt{\frac{10\cdot(0,1)^3}{2\cdot9\cdot10^9}}=\pm7,4\cdot10^{-7}\,\text{C}$$

4. a) El efecto fotoeléctrico consiste en la emisión de electrones por la superficie de un metal cuando sobre él incide luz de frecuencia superior a la llamada frecuencia umbral ν_0 del metal. Por debajo de dicha frecuencia la luz no arranca electrones, por mucha intensidad (cantidad de energía por unidad de tiempo y área) que ésta posea.

Para explicar estos aspectos Einstein postuló que la luz (la radiación electromagnética en general) estaba constituida por un partículas llamadas fotones, siendo $E_{\text{fotón}}=h\upsilon$ la energía de cada fotón individual para la luz de frecuencia υ. De esta forma, la extracción de electrones se produce por la colisión individual de un electrón del metal con un fotón. Si el fotón no lleva energía superior a la energía umbral $\phi_{\text{metal}} = h\upsilon_0$ no podrá arrancar el electrón. A dicha energía se la denomina función de trabajo o trabajo de extracción del metal.

Dado que la probabilidad de que más de un fotón colisione con un sólo electrón es casi nula, el aumento de la intensidad de la luz (número de fotones) no hace posible la extracción si cada fotón no transporta una energía superior a ϕ_{metal}. Por esta razón, el aumento de la intensidad luminosa tampoco implica un aumento de la energía cinética máxima de los electrones cuyo valor queda explicado como la energía restante de la del fotón y la necesaria para arrancar el electrón: $E_{\text{c,máx.}} = E_{\text{fotón}} - \phi_{\text{metal}} = h\left(\upsilon - \upsilon_0\right)$.

b) En nuestro caso, para el oro $\phi_{metal} = 5{,}1eV$, con lo que obtenemos la frecuencia umbral υ_0:

$$\phi_{\text{metal}} = h\upsilon_0 \longrightarrow 5{,}1 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} = 6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot \upsilon_0 \longrightarrow \upsilon_0 = 1{,}23 \cdot 10^{15}\,\text{Hz}$$

El potencial de frenado V_f es el necesario para frenar a los electrones que han sido arrancados del metal. Para obtenerlo aplicamos la conservación de la energía mecánica en el movimiento de cada electrón, igualando la energía cinética inicial de los electrones con la energía potencial eléctrica que adquieren al pararse: $E_{\text{p}} = E_{\text{c}} \longrightarrow eV_{\text{f}} = E_{\text{c}}$. Cuando la longitud de onda de los fotones incidentes es $\lambda = 230 \cdot 10^{-9}\,\text{m}$, la energía cinética máxima de los electrones emitidos es:

$$E_{\text{c}} = h\upsilon - \phi_{\text{metal}} = h\frac{c}{\lambda} - \phi_{\text{metal}} = 6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot \frac{3{,}0 \cdot 10^{8}}{230 \cdot 10^{-9}} - 5{,}1 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} = 4{,}88 \cdot 10^{-20}\,\text{J}$$

Finalmente, el potencial de frenado es:

$$eV_{\text{f}} = E_{\text{c}} \longrightarrow 1{,}60 \cdot 10^{-19} V_{\text{f}} = 4{,}88 \cdot 10^{-20} \longrightarrow V_{\text{f}} = 0{,}305\ \text{V}$$